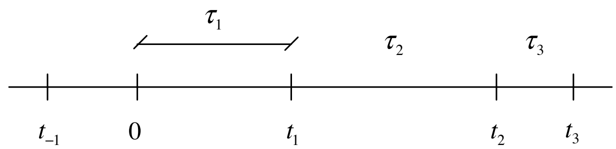
Tempi di interarrivo di un processo di Poisson

In molte applicazioni, ha interesse considerare i primi arrivi a partire da un istante iniziale s, che possiamo supporre uguale a zero senza perdita di generalità.



Definiamo come $\tau_n = t_n - t_{n-1}$, $t_0 = 0$, il tempo di interarrivo n-esimo. In proposito, vale il seguente teorema.

Teorema. Il tempo di arrivo t_n di un processo di Poisson omogeneo di intensità λ è una variabile aleatoria di Erlang di parametro λ e indice n.

Prova. Per $a \geq 0$ si ha

$$F_{t_n}(a) = P[t_n \leq a] = P[N(0,a] \geq n] = 1 - P[N(0,a] < n]$$
$$= 1 - e^{-\lambda a} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda a)^k}{k!}.$$

Si tratta della distribuzione di una variabile aleatoria di Erlang. In particolare, si ottiene che τ_1 è una variabile aleatoria esponenziale unilatera e che t_n , dato dalla somma dei primi n tempi di interarrivo, è una variabile aleatoria di Erlang, che come sappiamo risulta dalla somma di variabili esponenziali indipendenti.

Sarebbe allora facile mostrare che i tempi di interarrivo τ_n sono tutti variabili aleatorie indipendenti esponenziali unilatere di parametro λ. Ad esempio,

$$F_{\tau_2|\tau_1}(a|b) = \lim_{h \to 0^+} P[\tau_2 \leq a | b - h < \tau_1 < b + h] = P[N(b, b + a] \geq 1] = 1 - e^{-\lambda a},$$

il che dimostra che τ_2 ha una distribuzione esponenziale, ed è indipendente da τ_1. Si noti che τ_1 rappresenta il tempo di attesa residuo prima di un nuovo arrivo dopo l'origine. Il fatto che esso abbia la stessa descrizione statistica di un qualsiasi altro tempo di interarrivo deriva dalla proprietà della variabile aleatoria esponenziale di essere senza memoria.

Si ha il seguente risultato, che a prima vista può sembrare paradossale: τ_1 e τ_{-1} (in modulo) sono variabili aleatorie indipendenti esponenziali di parametro λ. Infatti, per a e b maggiori uguali a zero, si ha

$$P[\tau_1 \leq a, \tau_{-1} \leq b] = P[N(0,a] \geq 1, N(-b, 0] \geq 1] = (1 - e^{-\lambda a})(1 - e^{-\lambda b})$$

da cui derivando, e tenendo conto dell'andamento di $P[\tau_1 \leq a, \tau_2 \leq b]$ per a e b non necessariamente entrambi maggiori o uguali a zero, si ottiene

$$f_{\tau_1,\tau_2}(a, b) = \lambda\, e^{-\lambda a}\, 1(a)\ \lambda\, e^{-\lambda b}\, 1(b).$$

Ne segue che il tempo di interarrivo che cade attorno all'origine ha una distribuzione di Erlang di ordine 2. Questo non deve stupire se si pensa che, considerando un istante prefissato, lorigine appunto, è più probabile che attorno ad esso cadano tempi di interarrivo più grandi.