

Capitolo 1

Processi gaussiani e di Poisson. Rumore

1.1 Processi di Poisson e loro proprietà

1.1.1 Processi puntuali

Esistono in natura alcuni fenomeni in cui dei punti isolati sono distribuiti in maniera casuale in uno spazio continuo. Un caso molto importante è quello in cui consideriamo come spazio continuo l'insieme dei numeri reali associato all'evolvere del tempo: i punti isolati di questo spazio possono rappresentare gli istanti in cui si verificano determinati fatti che vengono comunemente detti *eventi*. Tra i fenomeni che possono essere rappresentati in tal modo ci sono ad esempio:

- 1) l'arrivo delle chiamate telefoniche in una centrale di commutazione;
- 2) le richieste di una risorsa (ad esempio l'accesso a disco) in un sistema di calcolo multitasking;
- 3) l'emissione degli elettroni da parte di un emettitore incandescente in una valvola termoionica;
- 4) l'arrivo dei fotoni provenienti da una sorgente luminosa su di un dispositivo fotorivelatore; ecc..

In altri casi lo spazio continuo di riferimento può essere una regione del piano o dello spazio euclideo. Si pensi, ad esempio, alla dislocazione dei fiori di papavero in un campo di grano o alla distribuzione delle stelle nello spazio astronomico.

Il modello probabilistico adatto a descrivere questo tipo di fenomeni è quello dei *processi puntuali*.

Lo spazio di riferimento che noi considereremo sarà sempre l'insieme R dei numeri reali che interpreteremo come asse dei tempi. In questo caso, ogni realizzazione di un processo puntuale è costituita da un insieme di punti dell'asse reale, detti *istanti di arrivo*. In particolare considereremo il caso in cui ogni realizzazione è costituita da un numero finito di punti o al massimo da una infinità numerabile di punti che indicheremo con t_1, t_2, t_3, \dots , come mostrato in Figura 1.1a.

Ogni realizzazione di un processo puntuale può essere rappresentata in modo conveniente associando ad ogni istante di arrivo t_i l'impulso $\delta(t - t_i)$ di area unitaria centrato proprio nell'istante t_i stesso, come mostrato in Figura 1.1b. Questa operazione consente di studiare il processo puntuale mediante il processo $z(t)$ definito come

$$z(t) = \sum_i \delta(t - t_i). \quad (1.1)$$

Quello che spesso interessa studiare dei processi puntuali è legato al numero di istanti di arrivo che si verificano in un sottoinsieme dell'asse reale dei tempi, che solitamente è costituito da un intervallo.

Dalla (1.1) risulta immediatamente che il numero di arrivi $N(A)$ che si verificano nel sottoinsieme A dell'asse reale risulta

$$N(A) = \int_A z(u) du.$$

Come abbiamo già detto, i sottoinsiemi di maggior interesse sono gli intervalli, e più precisamente gli intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra, cioè del tipo $(s, s + h]$, con $h > 0$.

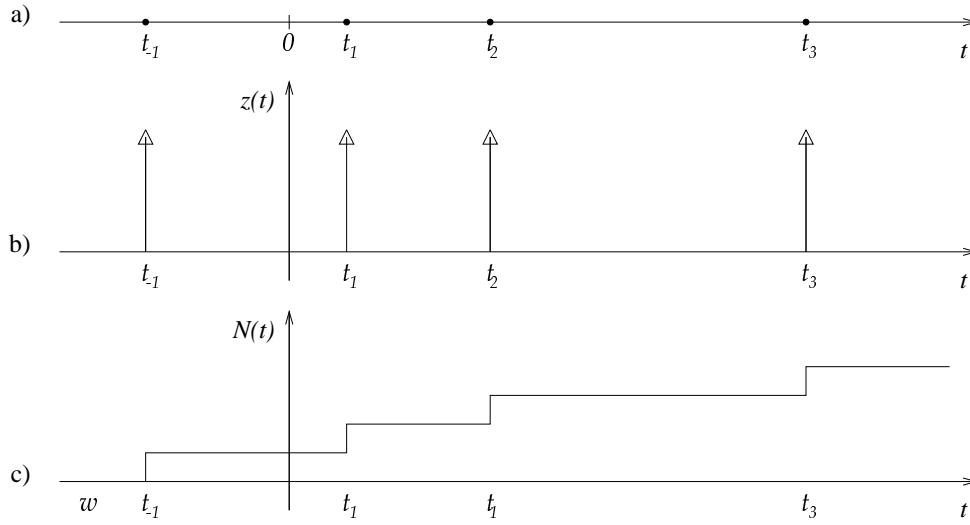


Figura 1.1 a) Esempio di realizzazione di un processo puntuale; b) realizzazione del processo puntuale associato; c) realizzazione del processo contatore associato.

Allora il numero di arrivi in tale intervallo risulta

$$N(s, s + h] = \int_s^{s+h} z(u) du.$$

Si noti che nel calcolo dell'integrale gli eventuali impulsi centrati nell'istante s non vanno considerati, mentre vanno considerati quelli centrati nell'istante $s + h$.

In base a quanto abbiamo finora visto, un processo aleatorio si dice di *tipo puntuale* se ogni sua realizzazione è costituita da un insieme finito o numerabile di arrivi $\{t_1, t_2, \dots\}$ tale che, per ogni numero intero positivo M e per ogni M -pla di intervalli $(s_1, s_1 + h_1], \dots, (s_M, s_M + h_M]$, i corrispondenti numeri di arrivi

$$N(s_1, s_1 + h_1], \dots, N(s_M, s_M + h_M] \quad (1.2)$$

sono delle variabili aleatorie.

Un processo puntuale risulta completamente specificato quando è nota la descrizione statistica congiunta di tutte le variabili aleatorie in (1.2). Si noti che le variabili aleatorie in (1.2) sono di tipo discreto poiché assumono solamente valori interi. Di conseguenza la loro descrizione statistica può essere data per mezzo delle corrispondenti distribuzioni di massa.

Se ora fissiamo un istante di riferimento w , è possibile considerare il numero di arrivi nell'intervallo $(w, t]$ al variare dell'estremo t . Tale numero viene detto *processo contatore* ed è quindi definito, per valori di $t > w$, dalla relazione

$$N(t) \triangleq N(w, t] = \int_w^t z(u) du, \quad t > w. \quad (1.3)$$

Tale definizione si può inoltre generalizzare (in maniera simile a quanto si fa con le aree negative nel caso degli integrali di funzioni) per valori di $t < w$ ponendo

$$N(t) \triangleq -N(t, w] = - \int_t^w z(u) du, \quad t < w. \quad (1.4)$$

La Figura 1.1c mostra un esempio di realizzazione del processo contatore relativo al processo puntuale di Figura 1.1a. Si noti che si tratta di un processo a tempo continuo e a valori interi. Inoltre, al crescere di t , il valore di $N(t)$ non può decrescere.

Ovviamente la descrizione statistica del processo contatore è sufficiente a descrivere completamente il processo puntuale, in quanto per ogni intervallo $(s, s + h]$ con $h > 0$ si ha

$$N(s, s + h] = N(s + h) - N(s).$$

1.1.2 Processi di Poisson

L'esempio più comune e più semplice di processi puntuali è quello dei *processi di Poisson*. La loro importanza è dovuta al fatto che molti fenomeni fisici che sono caratterizzati da arrivi casuali possono essere descritti mediante processi di Poisson. Esempi di tali fenomeni sono: l'emissione di particelle da parte di una sostanza radioattiva, l'emissione di fotoni da parte di una sorgente luminosa, le chiamate ad una centrale telefonica, ecc..

Un processo puntuale si dice *processo di Poisson* di intensità λ , con $\lambda > 0$, se il numero di arrivi $N(s, s + T]$ in un qualsiasi intervallo $(s, s + T]$, con $T > 0$, è una variabile aleatoria di Poisson di media λT e, inoltre, per ogni numero intero e positivo M e per ogni M -pla di intervalli disgiunti $(s_1, s_1 + T_1], \dots, (s_M, s_M + T_M]$, le variabili aleatorie $N(s_1, s_1 + T_1], \dots, N(s_M, s_M + T_M]$ sono indipendenti. Quest'ultima condizione può essere espressa in modo equivalente dicendo che *i numeri degli arrivi che si verificano in intervalli di tempo disgiunti sono indipendenti*.

Domanda 1.1 Scrivere la distribuzione di massa della variabile aleatoria $N(s, s + T]$ per ogni $s \in \mathbb{R}$ e $T > 0$.

Domanda 1.2 Verificare che, in un processo di Poisson, la probabilità che il numero di arrivi $N(s, s + T]$ sia prossimo al valor medio λT aumenta al crescere di λT .

Esercizio 1.1 Dimostrare che, per un processo di Poisson di intensità λ , la probabilità che si verifichi esattamente un arrivo in un intervallo di tempo infinitesimo è uguale alla durata dell'intervallo moltiplicata per λ . Si noti che questo è equivalente a dimostrare che, per ogni $s \in \mathbb{R}$

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}[N(s, s + T] = 1]}{T} = \lambda.$$

Esercizio 1.2 Dimostrare che, per un processo di Poisson, la probabilità di avere due o più arrivi contemporanei è nulla. Si noti che questo è equivalente a dimostrare che, per ogni $s \in \mathbb{R}$

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}[N(s, s + T] > 1]}{T} = 0.$$

Esercizio 1.3 Dimostrare che, per un processo di Poisson, la probabilità di avere un numero di arrivi nullo in un intervallo di tempo infinitesimo risulta pari a uno.

Dalla definizione di processo di Poisson segue che la descrizione statistica della variabile aleatoria $N(s, s + T]$ che dà il numero di arrivi nell'intervallo $(s, s + T]$, non dipende

dall'istante iniziale s ma solamente dalla durata T di tale intervallo. Ciò rappresenta una importante proprietà di *stazionarietà* dei processi di Poisson.

L'intensità λ del processo di Poisson, che ha le dimensioni dell'inverso di un tempo, dà una indicazione di quanti sono gli arrivi per unità di tempo.

È importante osservare che la descrizione statistica completa di un processo di Poisson è direttamente ricavabile dalla sola conoscenza della sua intensità λ , come possiamo già vedere considerando i seguenti esempi.

Esempio 1.1 Dato un processo di Poisson con intensità λ , vogliamo calcolare la probabilità che nell'intervallo $(3, 5]$ si verifichino due arrivi e nell'intervallo $(7, 11]$ si verifichino tre arrivi. Per quanto visto sopra possiamo scrivere

$$\begin{aligned} P[N(3, 5] = 2, N(7, 11] = 3] &= P[N(3, 5] = 2]P[N(7, 11] = 3] \\ &= e^{-2\lambda} \frac{(2\lambda)^2}{2!} e^{-4\lambda} \frac{(4\lambda)^3}{3!} \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato l'indipendenza fra il numero di arrivi negli intervalli $(3, 5]$ e $(7, 11]$ che sono disgiunti.

Esempio 1.2 Dato un processo di Poisson con intensità λ , vogliamo calcolare la probabilità che nell'intervallo $(1, 5]$ si verifichino zero arrivi e nell'intervallo $(2, 7]$ si verifichino n arrivi. È evidente che questo problema è equivalente a calcolare la probabilità che si verifichino zero arrivi nell'intervallo $(1, 5]$ e n arrivi nell'intervallo $(5, 7]$. Essendo questi ultimi due intervalli disgiunti, si ha

$$\begin{aligned} P[N(1, 5] = 0, N(2, 7] = n] &= P[N(1, 5] = 0, N(5, 7] = n] \\ &= P[N(1, 5] = 0]P[N(5, 7] = n] = e^{-4\lambda} e^{-2\lambda} \frac{(2\lambda)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Esempio 1.3 Dato un processo di Poisson con intensità λ , vogliamo calcolare la probabilità che nell'intervallo $(1, 5]$ si verifichino tre arrivi e nell'intervallo $(2, 7]$ si verifichi un solo arrivo. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} P[N(1, 5] = 3, N(2, 7] = 1] &= \sum_{k=0}^{\infty} P[N(1, 5] = 3, N(2, 5] = k, N(2, 7] = 1] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P[N(1, 2] = 3 - k, N(2, 5] = k, N(5, 7] = 1 - k] \\ &= P[N(1, 2] = 3]P[N(2, 5] = 0]P[N(5, 7] = 1] \\ &\quad + P[N(1, 2] = 2]P[N(2, 5] = 1]P[N(5, 7] = 0] \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^3}{3!} e^{-3\lambda} e^{-2\lambda} 2\lambda + e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!} e^{-3\lambda} 3\lambda e^{-2\lambda}, \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato l'indipendenza fra il numero di arrivi negli intervalli $(1, 2]$, $(2, 5]$ e $(5, 7]$ nonché il fatto che i termini della serie sono nulli per $k > 1$.

Esistono molti casi di interesse pratico in cui si verificano eventi diversi che possono essere convenientemente modellati come sovrapposizione di più processi di Poisson. Per esempio possiamo considerare quello che avviene in una centrale telefonica, in cui si verifica il sovrapporsi delle chiamate urbane e di quelle interurbane. Un altro esempio può essere quello della

sovrapposizione dei transiti di autotreni, autovetture e motocicli in una autostrada. Se rappresentiamo ogni singolo tipo di evento mediante un processo puntuale, la sovrapposizione dei diversi tipi di evento dà luogo al processo puntuale somma dei singoli processi, che è quello il cui processo contatore è la somma dei rispettivi processi contatore. In molti casi inoltre ogni singolo tipo di evento non ha alcuna relazione con gli altri tipi di evento, e quindi i vari flussi di eventi si possono ritenere *indipendenti*. Questa nozione intuitiva di indipendenza si può formalizzare nel seguente modo: due processi puntuali si dicono *indipendenti* se sono indipendenti i rispettivi processi contatori.

Vale allora l'importante proprietà che *la somma di K processi di Poisson indipendenti con intensità $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$, è ancora un processo di Poisson con intensità $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_K$.*

Al fine di dimostrare questa proprietà, consideriamo i processi contatori $N_1(t), \dots, N_K(t)$ dei singoli processi e il processo contatore $N(t)$ del processo somma. Per ogni intervallo $(s, s + T]$ si ha

$$N(s, s + T] = N_1(s, s + T] + \dots + N_K(s, s + T]$$

che è la somma di variabili aleatorie di Poisson indipendenti con parametri $\lambda_1 T, \dots, \lambda_K T$. Di conseguenza $N(s, s + T]$ risulta una variabile aleatoria di Poisson di media $(\lambda_1 + \dots + \lambda_K)T$. Inoltre è facile dimostrare che i numeri degli arrivi che si verificano in intervalli di tempo disgiunti sono indipendenti, quindi $N(t)$ risulta essere il processo contatore di un processo di Poisson con intensità $\lambda_1 + \dots + \lambda_K$.