La coda M/G/1

Nella coda M/G/1, gli ingressi sono modellati con un processo di Poisson di intensità λ, mentre i tempi di servizio, supposti indipendenti fra loro e dal processo degli ingressi, hanno una distribuzione generica $F_y(a)$. La dimensione dello spazio di attesa è infinita.

Lo studio della coda può essere effettuato facilmente andando a considerare il numero dei clienti nel sistema, $x(t)$, non per t generico, ma in istanti particolari t_n^+, immediatamente successivi alla n-esima partenza dal sistema. Indicando con $x_n \triangleq x(t_n^+)$ il numero di clienti nel sistema immediatamente dopo il verificarsi della n-esima partenza, possiamo scrivere le seguenti relazioni che ne specificano la dinamica.

1. Se la partenza n-esima lascia il sistema vuoto, prima del verificarsi di una nuova partenza, dobbiamo attendere l'arrivo di un cliente e la fine del suo tempo di servizio. Non appena tale cliente lascia il sistema, il numero di clienti sarà uguale a quelli arrivati nel frattempo durante il suo tempo di servizio, che indicheremo con la variabile aleatoria v_n. In formule, immediatamente dopo la partenza del cliente, avremo
$$x_{n+1} = v_n.$$

2. Se dopo la partenza n-esima il sistema non è vuoto, il prossimo cliente in coda accede al servizio, si aggiungono poi v_n clienti al sistema. Infine, dopo che nell'istante t_{n+1}^+ tale cliente ha lasciato il sistema, si ha, in formule,
$$x_{n+1} = x_n + v_n - 1.$$

Possiamo unificare la scrittura delle due espressioni sopra scritte introducendo la funzione indicatrice $\chi\{x_n > 0\}$ che vale 1 se $x_n > 0$ e 0 se $x_n = 0$, ottenendo

$$x_{n+1} = x_n + v_n - \chi\{x_n > 0\}. \tag{1}$$

Nelle ipotesi considerate, si può facilmente dimostrare che x_n evolve secondo una catena di Markov a tempo discreto, di cui è possibile calcolare il vettore delle probabilità asintotiche. Inoltre, si potrebbe dimostrare, con qualche difficoltà aggiuntiva, che la distribuzione calcolata limitatamente agli istanti agli istanti t_n^+ è valida a regime per ogni valore di t, cosicché il processo $x(t)$ diventa stazionario.

Ci limitiamo qui a calcolare la media di x_n (e quindi di $x(t)$) in condizioni stazionare.

Prendendo il quadrato di entrambi i membri della (1), e poi l'aspettazione, si ottiene, supponendo di essere in regime stazionario, per cui $\mathrm{E}[x_{n+1}^2] = \mathrm{E}[x_n^2] = M_x$,

$$M_x = M_x + M_v + \mathrm{E}[\chi^2\{x_n > 0\}] + 2\mathrm{E}[x_n v_n] - 2\mathrm{E}[x_n \chi\{x_n > 0\}] - 2\mathrm{E}[v_n \chi\{x_n > 0\}].$$

Possiamo ora calcolare i vari termini dell'espressione precedente, che ci permetteranno di ricavare il valor medio m_x di clienti nel sistema.

Per quanto riguarda v_n, si tratta del numero di arrivi di poisson in un intervallo di tempo di lunghezza aleatoria, pari al tempo di servizio y. Possiamo scrivere

$$M_v = \int_0^{+\infty} \mathrm{E}[v_n^2 | y = a]\; f_y(a)\; da = \int_0^{+\infty} (\lambda a + \lambda^2 a^2)\; f_y(a)\; da = \lambda m_y + \lambda^2 M_y,$$

dove si è sfruttato il fatto che, sotto la condizione $y = a$, v_n risulta una v.a. di Poisson di media e varianza λa.

Essendo $\chi^2\{x_n > 0\} = \chi\{x_n > 0\}$ una v.a. che vale 0 se $x_n = 0$ e 1 altrimenti, si ha

$$\mathrm{E}[\chi^2\{x_n > 0\}] = 1 - p_0 = \lambda m_y,$$

dove abbiamo utilizzato la formula di Little per un sistema con un unico servente.

Inoltre

$$\mathrm{E}[x_n v_n] = m_x m_v = \lambda m_y m_x,$$

essendo il numero di arrivi in un tempo di servizio indipendente dal numero di clienti nel sistema e procedendo, per il calcolo di m_v con lo stesso procedimento utilizzato per calcolare M_v.

Si ha poi

$$\mathrm{E}[x_n \chi\{x_n > 0\}] = \sum_{k=0}^{+\infty} k\chi\{k > 0\}\; p_k = m_x$$

e, ancora per l'indipendenza di v_n e x_n,

$$\mathrm{E}[v_n \chi\{x_n > 0\}] = m_v(1 - p_0) = \lambda^2 m_y^2.$$

Sostituendo e ricavando m_x, si trova

$$m_x = \frac{\lambda m_y}{2} + \frac{\lambda m_y + \lambda^2 \sigma_y^2}{2(1 - \lambda m_y)}.$$

Si può facilmente verificare che, se i tempi di servizio sono esponenziali con media $m_y = 1/\mu$, si ritrova la nota formula della coda M/M/1

$$m_x = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}.$$