

Domanda

Dare la definizione di trasformazione lineare.

1. Dire se la trasformazione $x(t) \rightarrow x(-t)$, $t \in \mathcal{R}$, è una trasformazione lineare, e in caso affermativo calcolarne il nucleo;
2. dire se la trasformazione $x(t) \rightarrow x^*(-t)$, $t \in \mathcal{R}$, è una trasformazione lineare, e in caso affermativo calcolarne il nucleo.

Prova Teoria dei Segnali
laurea triennale

A.A. 2005/06

Cognome e Nome _____

Matricola _____

Esercizi

Esercizi

1. Si consideri il segnale $x(t) = (1 + i) e^{-2|t|/T + i2\pi|t|/T}$, $t \in \mathbb{R}$, dove T è una costante positiva e i l'unità immaginaria. Calcolare l'energia di $x(t)$.
2. Calcolare la convoluzione dei segnali, definiti per $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t+T}{2T}\right) - \delta_R(t-T), \quad y(t) = -e^{t/T} 1(-t).$$

3. Calcolare la trasformata di Fourier del segnale

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{|t - kT_p|}{D}\right) \text{rect}\left(\frac{-t + kT_p}{2D}\right), \quad t \in \mathbb{R}/Z(T_p), \quad D \leq T_p/2.$$

4. Sulla base del teorema del campionamento $\mathbb{R} \rightarrow Z(T)$, calcolare la minima frequenza di campionamento per la ricostruzione del segnale $x(t) = \text{sinc}^5(t) \cos 2\pi t$, $t \in \mathbb{R}$.
5. Una trasformazione lineare tempo-invariante a tempi uguali, $I = U = \mathbb{R}$, ha nucleo $h(t, u) = g(t - u)$, con

$$G(f) = e^{-f/F} \text{rect}\frac{f - F/2}{F}.$$

Dire se $g(t)$ è reale e calcolarne l'energia.

Soluzioni.

Domanda. La tf. $x(t) \rightarrow x(-t)$ è una tf. lineare (soddisfa la sovrapposizione degli effetti - verificarlo!). Il nucleo si identifica inviando in ingresso il segnale $\delta_R(\cdot - u_0)$, cui corrisponde l'uscita $h(t, u_0) = \delta_R(-t - u_0)$. Quindi il nucleo è $h(t, u) = \delta_R(-t - u) = \delta_R(t + u)$.

La tf. $x(t) \rightarrow x^*(-t)$ non è lineare. In particolare, non è omogenea, in quanto, se $x(t) \rightarrow y(t) = x^*(-t)$, si ha $\alpha x(t) \rightarrow \alpha^* x^*(-t) \neq \alpha y(t)$.

Es.1.

$$|x(t)|^2 = |1 + i|^2 e^{-4|t|/T} = 2e^{-4|t|/T}.$$
$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = 4 \int_0^{+\infty} e^{-4t/T} dt = T.$$

Es.2. $z(t) = x * y(t)$ risulta la somma dei due segnali

$$z_1(t) = x_1 * y(t), \quad x_1(t) = \text{rect}\left(\frac{t+T}{2T}\right),$$
$$z_2(t) = x_2 * y(t), \quad x_2(t) = -\delta_R(t-T).$$

Per le note proprietà dell'impulso, si ha

$$z_2(t) = -y(t-T) = e^{(t-T)/T} 1(-(t-T)).$$

Inoltre (si disegnino $y(u)$ e $x_1(t-u)$), si ha, per $t \leq -2T$,

$$z_1(t) = - \int_t^{t+2T} e^{u/T} du = T e^{t/T} (1 - e^2),$$

per $-2T < t \leq 0$,

$$z_1(t) = - \int_t^0 e^{u/T} dt = T e^{t/T} - T,$$

e $z_1(t) = 0$ per $t > 0$.

Es.3. Come si verifica facilmente, $s(t) = \text{rep}_{T_p} \text{triangle}(t/D)$, $t \in R/Z(T_p)$. La tf. duale della periodizzazione è il campionamento $R \rightarrow Z(1/T_p)$. Essendo, per $t \in R$, $\mathcal{F}[\text{triangle}(t/D)] = D \text{sinc}^2(fD)$, si ha dunque,

$$S\left(\frac{k}{T_p}\right) = D \text{sinc}^2(kD/T_p).$$

Es.4. Il segnale $x_1(t) = \text{sinc}^5(t)$ ha tf. di Fourier data dalla convoluzione di 5 funzioni rettangolari con banda 0.5 Hz. Dunque $X_1(f)$ ha banda $B_1 = 2.5$ Hz. Il segnale $x(t) = \text{sinc}^5(t) \cos 2\pi t$, $t \in R$ ha tf. di Fourier $X(f) = 0.5 X_1(f-1) + 0.5 X_1(f+1)$, e ha banda $B = 3.5$ Hz. La minima frequenza di campionamento è dunque $F_c = 2B = 7$ campioni/s.

Es.5. Dato che $G^*(-f) = G(-f) \neq G(f)$, $G(f)$ non ha simmetria hermitiana e dunque $g(t)$ non è reale. Usando il teorema di Parseval, si ha

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df = \int_0^F e^{-2f/F} df = \frac{F}{2} (1 - e^{-2}).$$