

Cognome e Nome _____

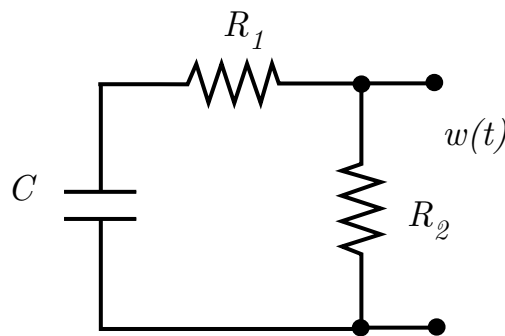
Matricola _____

Domanda

Modulazione SSB: schema del sistema di trasmissione, con derivazione del rapporto segnale/rumore complessivo Λ .

Esercizi

1. Si considerino due variabili aleatorie indipendenti ed equidistribuite x e y , con alfabeto $\{\pm 1\}$ e simboli equiprobabili. Si consideri $z = xy$. Si calcoli la distribuzione di massa della v.a. z .
2. Si consideri la quantizzazione uniforme, con $L = 2$ livelli, di un processo aleatorio con densità di probabilità del primo ordine con andamento a triangolo isoscele in $[-V, V]$. Calcolare, in maniera esatta, la potenza dell'errore di quantizzazione.
3. Si consideri un sistema di trasmissione numerica con modem analogico. Sul canale si può utilizzare la banda di frequenze $[300, 3200]$ Hz. Calcolare la dimensione minima della costellazione QAM che è necessario utilizzare per trasmettere ad una velocità superiore a 28 kbit/s.
4. In un sistema 4-PAM con simboli equiprobabili $a(kT) \in \{\pm 1, \pm 3\}$, l'impulso in trasmissione e la risposta impulsiva dell'amplificatore di ricezione hanno, rispettivamente, le espressioni $g(t) = V_0 \text{sinc}^3(t/T)$, $h(t) = h_0 \text{sinc}(3t/T)$, mentre il mezzo trasmissivo è trasparente. Il rumore all'ingresso dell'amplificatore di ricezione è gaussiano, bianco, con densità spettrale R_0 . Calcolare la probabilità di errore del sistema.
5. Si consideri il bipolo di figura, dove la resistenza R_1 è posta alla temperatura T_1 °K, e la resistenza R_2 è posta alla temperatura T_2 °K. Calcolare la densità spettrale del rumore termico $w(t)$ in uscita del bipolo.



Cognome e Nome _____

Matricola _____

Esercizio

Si consideri uno schema di trasmissione binaria con simboli equiprobabili, periodo di cifra T , in cui i segnali associati ai simboli sono dati da

$$s_1(t) = A_0 \sin(2\pi f_0 t + \pi/6) h(t), \quad f_0 \gg 2/T,$$

$$s_2(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t) h(t),$$

dove $h(t)$ ha trasformata di Fourier $H(f) = \sqrt{H_1(f)}$, con

$$h_1(t) = \mathcal{F}^{-1}[H_1(f)] = h_0 \operatorname{sinc}^2(t/T).$$

- 1) Calcolare una base ortonormale per lo spazio dei segnali;
- 2) calcolare l'energia di $s_1(t)$ e $s_2(t)$;
- 3) calcolare la probabilità di errore del sistema, assumendo un ricevitore ottimo e un rumore additivo di ingresso bianco con densità spettrale $N_0/2$.

Soluzioni.

1. L'alfabeto di z risulta chiaramente $\{+1, -1\}$ e si ha

$$P[z = 1] = P[x = 1, y = 1] + P[x = -1, y = -1] = P[x = 1]P[y = 1] + P[x = -1]P[y = -1] = 0.5,$$

$$P[z = -1] = P[x = -1, y = 1] + P[x = 1, y = -1] = P[x = -1]P[y = 1] + P[x = 1]P[y = -1] = 0.5,$$

dove si è sfruttata l'indipendenza di x e y .

2. Con $[-V, V]$ come regione granulare, gli intervalli di quantizzazione sono $[-V, 0]$ e $[0, V]$ e $-V/2$, $V/2$ i rispettivi livelli di ricostruzione. Si ha

$$M_e = 2 \int_0^V (a - V/2)^2 \left(-\frac{a}{V^2} + \frac{1}{V} \right) da = \frac{V^2}{12}.$$

3. La banda disponibile è di 2900 Hz. In un sistema di trasmissione numerica QAM in banda passante, utilizzando un impulso a banda minima, si possono trasmettere al più 2900 simboli/s su tale banda. Per trasmettere più di 28 kbit/s, occorre trasmettere 10 bit/simbolo, e quindi utilizzare una costellazione 1024-QAM.

4. La trasformata di Fourier dell'impulso $g(t)$ ha estensione spettrale $[-3/(2T), 3/(2T)]$. Si ha inoltre

$$H(f) = \frac{h_0 T}{3} \text{rect} \left(\frac{fT}{3} \right),$$

che risulta costante sull'estensione spettrale di $g(t)$. Dunque, per l'impulso equivalente $c(t)$ si ha

$$C(f) = G(f)H(f) = \frac{h_0 T}{3} G(f) \implies c(t) = \frac{h_0 T}{3} g(t) = \frac{V_0 h_0 T}{3} \text{sinc}^3(t/T).$$

Si tratta di un impulso di Nyquist, con $V'_0 = c(0) = V_0 h_0 T/3$. La varianza del rumore nel punto di decisione risulta

$$\sigma_e^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R_0 |H(f)|^2 df = \frac{3R_0}{T} \left(\frac{h_0 T}{3} \right)^2.$$

In un sistema 4-QAM con simboli equiprobabili, la probabilità di errore risulta

$$P_e = \frac{3}{2} Q \left(\frac{V'_0}{\sigma_e} \right).$$

5. Usando il calcolo simbolico, si ha

$$W = V_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2 + 1/(j2\pi fC)} + V_2 \frac{R_1 + 1/(j2\pi fC)}{R_1 + R_2 + 1/(j2\pi fC)}.$$

Dopo la valutazione di WW^* , passando alle densità spettrali e tenendo conto del fatto che le due tensioni di rumore $v_1(t)$ e $v_2(t)$ sono indipendenti, si ricava

$$R_w(f) = 2kT_1 R_1 \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2 + 1/(2\pi fC)^2} + 2kT_2 R_2 \frac{R_1^2 + 1/(2\pi fC)^2}{(R_1 + R_2)^2 + 1/(2\pi fC)^2}.$$

Soluzioni vecchio ordinamento.

1. Si può scrivere

$$s_1(t) = A_0(\sin(2\pi f_0 t) \cos(\pi/6) + \cos(2\pi f_0 t) \sin(\pi/6))h(t).$$

I due segnali

$$\tilde{\phi}_1(t) = A_0 h(t) \cos(2\pi f_0 t), \quad \tilde{\phi}_2(t) = A_0 h(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

sono ortogonali in quanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A_0^2 h^2(t) \sin(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A_0^2 h^2(t) 0.5 \sin(2\pi 2f_0 t) dt = 0,$$

dato che $h^2(t)$ ha banda $2/T$ e $2f_0 > 2/T$ ($h(t)$ ha infatti banda $1/T$). La base ortonormale si ottiene normalizzando i segnali $\tilde{\phi}_1(t)$ e $\tilde{\phi}_2(t)$ in modo che abbiano energia unitaria. Si verifica facilmente che $\tilde{\phi}_1(t)$ e $\tilde{\phi}_2(t)$ hanno la stessa energia E_ϕ e si ha in particolare

$$E_\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} A_0^2 h^2(t) \cos^2(2\pi f_0 t) dt = \frac{A_0^2 E_h}{2},$$

con

$$E_h = \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(f) df = h_1(0) = h_0.$$

Dunque, la base ortonormale risulta

$$\phi_1(t) = \tilde{\phi}_1(t) / \sqrt{E_\phi} = \sqrt{\frac{2}{h_0}} h(t) \cos(2\pi f_0 t),$$

$$\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{h_0}} h(t) \sin(2\pi f_0 t).$$

2. Le componenti di $s_1(t)$ rispetto alla base ortonormale sono

$$\mathbf{s}_1 = \left[A_0 \sin \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{h_0}{2}}, A_0 \cos \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{h_0}{2}} \right],$$

mentre quelle di $s_2(t)$ sono

$$\mathbf{s}_2 = \left[A_0 \sqrt{\frac{h_0}{2}}, 0 \right].$$

Le energie risultano

$$E_{s_1} = \left(A_0 \sin \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{h_0}{2}} \right)^2 + \left(A_0 \cos \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{h_0}{2}} \right)^2;$$

$$E_{s_2} = \left(A_0 \sqrt{\frac{h_0}{2}} \right)^2.$$

3. La probabilità di errore risulta

$$P_e = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right),$$

con $\sigma = \sqrt{N_0/2}$, e

$$d^2 = \left(A_0 \sin \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{h_0}{2}} - A_0 \sqrt{\frac{h_0}{2}} \right)^2 + \left(A_0 \cos \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{h_0}{2}} \right)^2.$$