

Prova di accertamento di Comunicazioni Elettriche

A.A. 2003/04

laurea triennale

Cognome e Nome _____

Matricola _____

Domanda

Rumore termico e calcolo simbolico per l'analisi spettrale nelle reti elettriche.

Cognome e Nome _____

Matricola _____

Esercizi

1. Sia x una variabile aleatoria discreta con alfabeto $\{k \in Z\}$ e distribuzione di massa

$$p_x(k) = \frac{(1-p)^2}{(1+2p-p^2)} (|k|+1)p^{|k|}.$$

Trovare la probabilità $P[\log(0.1 + |x|) \geq 0]$.

2. Un processo aleatorio stazionario $x(kT)$ a media nulla, ha densità di probabilità del primo ordine con andamento a trapezio isoscele con base minore $b_m = V$ e base maggiore $B_M = 3V$. Il processo viene quantizzato con un quantizzatore uniforme, fra $[-3V/2, 3V/2]$, a tre livelli e passo di quantizzazione $\Delta = V$. Trovare (esattamente) il rapporto segnale/rumore di quantizzazione.
3. Si consideri un sistema di trasmissione binaria PAM, con simboli equiprobabili $a_k = \pm 1$ e periodo di simbolo T . Sia $g(t) = V_0 \text{sinc}(t/T)$, l'impulso in trasmissione, $L(f) = A_M$ la risposta in frequenza del mezzo trasmissivo e $h(t) = h_0 \text{sinc}(t/(2T)) \text{sinc}(3t/(2T))$ l'amplificatore di ricezione. Si determini la probabilità di errore del sistema supponendo il rumore in ingresso all'amplificatore di ricezione bianco, gaussiano con densità spettrale R_0 .
4. In un sistema di trasmissione SSB, il segnale di informazione ha correlazione $r_x(\tau) = V_0^2 \text{sinc}^2(2B\tau)$. L'amplificatore di trasmissione ha un guadagno A_T sulla banda del segnale. Calcolare la potenza statistica del segnale trasmesso dopo l'amplificatore di trasmissione.
5. Sia $x(t)$ un processo aleatorio uniforme in $[-V, V]$ con densità spettrale $R_x(f) = R_0 \text{triangle}(f/B)$, con $B = 20$ kHz. Calcolare la banda minima richiesta per la trasmissione del processo per via numerica, utilizzando un sistema 1024-QAM e assicurando un rapporto segnale/rumore di quantizzazione superiore a 45 dB.

Soluzioni.

1. Si ha

$$\log(0.1 + |x|) \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 0.9.$$

Dunque, dato che x assume solamente valori in Z , $P[\log(0.1 + |x|) \geq 0] = P[|x| \geq 1] = 1 - P[x = 0]$, con

$$P[x = 0] = p_x(0) = \frac{(1-p)^2}{(1+2p-p^2)}.$$

2. L'altezza del trapezio è $1/(2V)$, dato che l'area della densità di probabilità deve essere unitaria. Si ha

$$M_x = 2 \int_0^{\frac{V}{2}} \frac{1}{2V} a^2 da + 2 \int_{\frac{V}{2}}^{\frac{3V}{2}} \left(-\frac{1}{2V^2}a + \frac{3}{4V} \right) a^2 da = \frac{5}{12}V^2,$$
$$M_e = \int_{-\frac{V}{2}}^{\frac{V}{2}} \frac{1}{2V} (a-0)^2 da + 2 \int_{\frac{V}{2}}^{\frac{3V}{2}} \left(-\frac{1}{2V^2}a + \frac{3}{4V} \right) (a-V)^2 da = \frac{1}{12}V^2.$$

Dunque, $\text{SNR} = M_x/M_e = 5$.

3. L'amplificatore di ricezione ha una risposta in frequenza con andamento a trapezio isoscele con base maggiore $2/T$, base minore $1/T$ e altezza $2h_0T/3$. Il prodotto $C(f) = G(f)L(f)H(f)$ risulta pertanto un impulso rettangolare con supporto $f \in [-1/(2T), 1/(2T)]$ e ampiezza

$$C_0 = (2h_0T/3)(V_0T)A_M.$$

Ne segue che $c(t)$ è un impulso di Nyquist con $c(0) = (2h_0T/3)(V_0T)A_M$. Per quanto riguarda il rumore,

$$\sigma_w^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R_0 |H(f)|^2 df = \frac{16R_0h_0^2T}{27}.$$

Quest'ultimo calcolo si effettua facilmente, considerando che $|H(f)|^2$ ha un andamento costituito da un tratto costante e da due archi di parabola. Infine, $P_e = Q(c(0)/\sigma_w)$.

4. In un sistema SSB, la modulazione determina la moltiplicazione per un fattore $1/2$ della potenza del segnale di informazione, mentre il filtraggio in banda passante determina (a parte il guadagno A_T^2 , un ulteriore dimezzamento della potenza, a causa del filtraggio della banda inferiore. Dunque $M_T = M_x A_T^2/4$. Inoltre $M_x = r_x(0) = V_0^2$.
5. Dato che l'ingresso è uniforme, il rapporto segnale/rumore di quantizzazione, in dB, risulta circa uguale a $6m$, dove m è il numero di bit del quantizzatore. Per avere $6m > 45$ basta scegliere un quantizzatore a 8 bit/campione. L'ingresso ha banda B , quindi per il teorema del campionamento sono necessari $2B = 40000$ campioni/s. Il flusso da trasmettere risulta dunque pari a $40000 \cdot 8 = 320000$ bit/s. Nella 1024-QAM, ogni simbolo trasmette $\log_2 1024 = 10$ bit. In definitiva, occorre trasmettere 32000 campioni/s, e la banda minima necessaria risulta $1/T = 2f_N = 32$ kHz.