

Motore trifase a induzione

Struttura e principio di funzionamento. I *motori a induzione*, o *asincroni*, trifase costituiscono una delle categorie di motori in corrente alternata fra le più diffuse nelle applicazioni industriali, a velocità fissa e variabile. La *conversione elettromeccanica* che essi attuano segue il principio di funzionamento dei *sistemi a induzione*. Una rappresentazione schematica della struttura di un motore asincrono a due poli è mostrata in Fig.1.

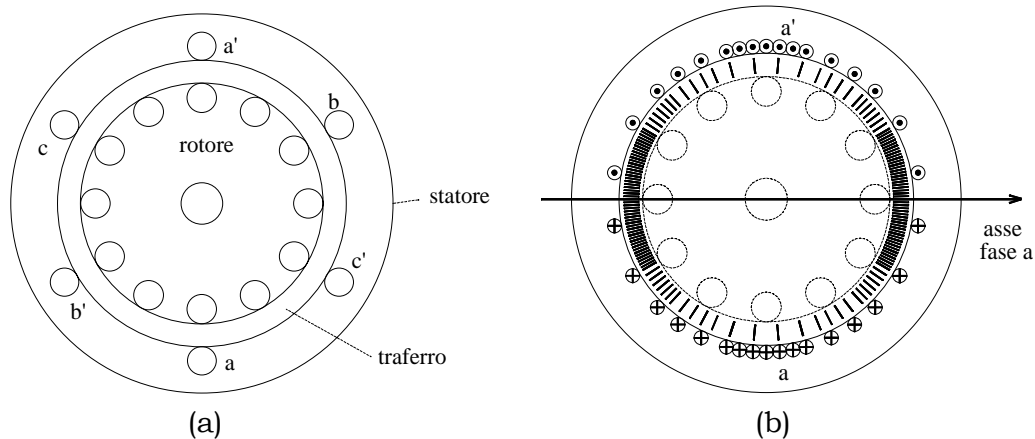


Fig.1 - (a) - Rappresentazione schematica di un motore ad induzione
(b) - Particolare dell'avvolgimento della fase a

Esso comprende uno *statore* (*parte fissa*) e un *rotore* (*parte mobile*) entrambi a forma di corona cilindrica di materiale ferromagnetico laminato e separati da un *traferro* in aria. Sulle superfici cilindriche di statore e rotore che si affacciano al traferro sono ricavate, secondo la direzione delle generatrici, le *cave* di statore e di rotore destinate a contenere l'*avvolgimento statorico* e *rotorico* rispettivamente (omesse per chiarezza grafica nella Fig.1). L'avvolgimento di statore è per tutto simile a quello di un motore brushless sinusoidale. Le sue tre *fasi* fanno capo alla morsettiera del motore attraverso la quale esso può essere alimentato da una sorgente trifase esterna. Il circuito di rotore può essere realizzato con un avvolgimento trifase distribuito, del tutto analogo a quello di statore (*rotore avvolto*), i cui terminali fanno capo a tre anelli su cui strisciano tre spazzole che consentono il collegamento dell'avvolgimento rotorico ad un circuito esterno. Molto più spesso, comunque, il circuito di rotore è realizzato mediante un insieme di sbarre di alluminio (una per ogni cava) fra loro tutte collegate alle due estremità da due anelli, così a realizzare una struttura comunemente denominata *rotore a gabbia*. Tale struttura, sottoposta all'azione del campo magnetico prodotto dall'avvolgimento statorico, si comporta come un avvolgimento trifase dello stesso tipo e con lo stesso numero di poli di quello di statore. D'ora in poi si farà dunque riferimento per il rotore ad un avvolgimento trifase distribuito del tutto simile a quello di statore, senza più preoccuparsi di quale sia l'effettiva struttura costruttiva del rotore stesso. Per richiamare il funzionamento del motore a induzione si può partire dalle equazioni generali di bilancio delle tensioni delle sue fasi a,b,c statoriche e rotoriche, che con la convenzione degli utilizzatori sono per lo statore:

$$u_{sa} = R_s i_{sa} + \frac{d\lambda_{sa}}{dt} \quad u_{sb} = R_s i_{sb} + \frac{d\lambda_{sb}}{dt} \quad u_{sc} = R_s i_{sc} + \frac{d\lambda_{sc}}{dt} \quad (1)$$

e per il rotore

$$0 = R_r i_{ra} + \frac{d\lambda_{ra}}{dt} \quad 0 = R_r i_{rb} + \frac{d\lambda_{rb}}{dt} \quad 0 = R_r i_{rc} + \frac{d\lambda_{rc}}{dt} \quad (2)$$

dove si è omessa per semplicità la dipendenza dal tempo delle tensioni u , delle correnti i e dei flussi concatenati λ . Ciascuno dei flussi concatenati che appare nelle (1) e (2) è dovuto all'effetto combinato di tutte le correnti presenti nel motore. Assumendo che il circuito magnetico sia privo di correnti parassite ed inoltre non manifesti saturazione e isteresi magnetiche, ciascun flusso concatenato, per esempio λ_{sa} , potrà essere espresso come:

$$\lambda_{sa} = \lambda_{ssa} + \lambda_{sra} \quad (3)$$

ove i due contributi sono:

$$\lambda_{ssa} = L_{ss} i_{sa} + M_{ss} i_{sb} + M_{ss} i_{sc} \quad (4)$$

$$\lambda_{sra} = M_{sr} \cos(\vartheta_{me}) i_{ra} + M_{sr} \cos(\vartheta_{me} + 2\pi/3) i_{rb} + M_{sr} \cos(\vartheta_{me} + 4\pi/3) i_{rc} \quad (5)$$

Per la simmetria cilindrica e l'isotropia della struttura, si è posto costante, ovvero indipendente dalla posizione ϑ_{me} del rotore, il coefficiente L_{ss} di auto induzione della fase di statore, costanti e uguali i coefficienti di mutua induzione $|M_{ss}|$ fra le fasi di statore b e c e la fase a. Ripetendo le (3) per le altre cinque fasi e unendo le espressioni dei flussi così ottenute alle (1) e (2) si ottiene il sistema differenziale che descrive la dinamica elettrica del motore in esame. Appare evidente la sua complessità dovuta anche alla dipendenza di alcuni suoi coefficienti dalla posizione rotorica.

Analisi del funzionamento in regime sinusoidale. Le equazioni di tensione per una fase di statore e di rotore, scritte secondo la convenzione dei fasori temporali¹, sono rispettivamente le seguenti:

$$\dot{U}_s = R_s \dot{I}_s + j\Omega_s L_t \dot{I}_s + j\Omega_s \frac{L_m}{L_r} \dot{\Lambda}_r \quad 0 = R_r \dot{I}_r + j(\Omega_s - \Omega_{me}) \dot{\Lambda}_r \quad (6)$$

Il flusso di rotore è prodotto dalle correnti di statore e di rotore, secondo la seguente espressione:

$$\dot{\Lambda}_r = L_r \dot{I}_r + L_m \dot{I}_s \quad (7)$$

ed eliminando la corrente di rotore dalla seconda delle (6) si ottiene

$$0 = \frac{R_r}{L_r} \dot{\Lambda}_r - R_r \frac{L_m}{L_r} \dot{I}_s + j(\Omega_s - \Omega_{me}) \dot{\Lambda}_r \quad (8)$$

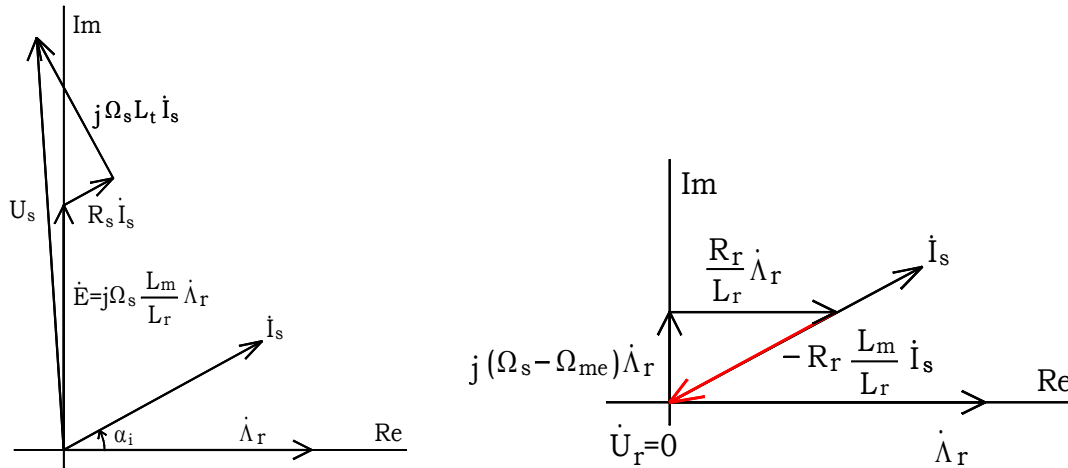
dove $L_s = L_{ss} + |M_{ss}|$ e $L_r = L_{rr} + |M_{rr}|$ prendono rispettivamente il nome di induttanza (sincrona) di statore e di rotore $L_t = L_s - L_m^2/L_r$ è detta *induttanza transitoria (transient inductance)* o *induttanza di dispersione totale*. Si è indicata con Ω_s la velocità angolare del flusso di rotore, che naturalmente a regime coincide con la pulsazione

¹Molto spesso, per convenzione, i fasori temporali vengono scritti con un modulo pari al valore efficace delle grandezze sinusoidali a cui si riferiscono. Nella presente trattazione, che deriva da quella più generale dei vettori spaziali, si considerano invece fasori temporali che hanno ampiezza pari al valore massimo delle grandezze sinusoidali.

di tutte le grandezze elettriche presenti nella macchina. Un'altra equazione importante lega l'ampiezza del flusso di rotore a quella della corrente di statore:

$$|\dot{\Lambda}_r| = L_m |\dot{I}_s| \cos(\alpha_i) \quad (9)$$

Scegliendo un sistema di assi cartesiani con l'asse reale coincidente con il flusso di rotore $\dot{\Lambda}_r$, si ottengono i seguenti diagrammi fasoriali:



La grandezza $\Omega_s - \Omega_{me}$ si definisce pulsazione di scorrimento e rappresenta la differenza tra la velocità di rotazione del campo magnetico rotante al traferro e la velocità meccanico-elettrica. Quest'ultima è in generale legata alla velocità meccanica Ω_m del rotore dall'espressione $\Omega_{me} = p \cdot \Omega_m$. Si noti che per un motore con una sola coppia polare ($p=1$) Ω_m e Ω_{me} coincidono. Basandosi sui bilanci energetici, è possibile ricavare per la coppia un'espressione particolarmente significativa:

$$T = \frac{3}{2} p \frac{L_m}{L_r} |\dot{\Lambda}_r| |\dot{I}_s| \sin(\alpha_i) \quad (10)$$

dove α_i è la fase del fasore di corrente rispetto a quello del flusso di rotore, denominata anche *l'angolo di coppia*. A differenza del motore sincrono a magneti permanenti, nel motore asincrono il flusso di rotore non è generato da un magnete, ma dalle correnti di rotore che nascono per effetto delle fem indotte dal campo magnetico di statore. La (10) racchiude il delicato concetto che le correnti di statore generano la coppia sia intervenendo direttamente, che attraverso la formazione del flusso di rotore. Nel motore in corrente continua ad eccitazione indipendente questi ruoli erano separati, ed affidati rispettivamente alla corrente d'armatura e alla corrente magnetizzante. Il loro controllo distinto porta ad elevate prestazioni dinamiche. Allo stesso modo, i metodi di controllo più avanzati del motore asincrono (controllo ad orientamento di campo) operano agendo separatamente sulla parte che produce flusso (*flux-producing component*) e su quella che produce coppia (*torque-producing component*). Si ottiene così di poter sfruttare per gli azionamenti per motori asincroni molti dei risultati ottenuti con gli azionamenti in continua, emulandone le prestazioni dinamiche.

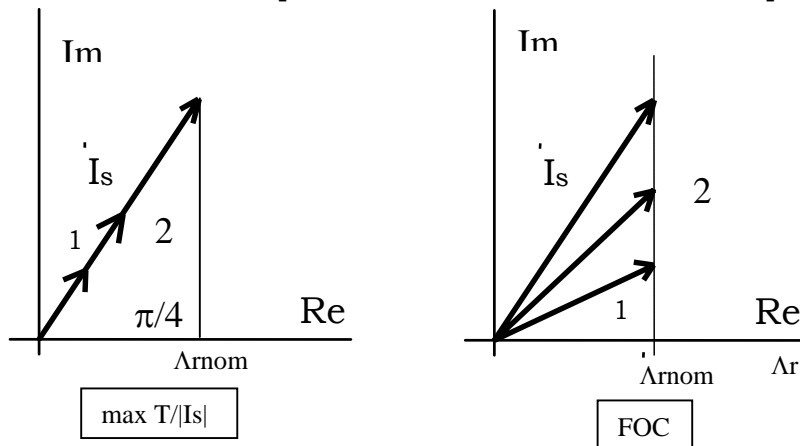
Una prima osservazione è relativa alla necessità di avere una pulsazione di scorrimento diversa da zero. In caso contrario, l'equazione di tensione di rotore

potrebbe essere soddisfatta solo se il flusso di rotore e la corrente di statore fossero in fase ($\alpha_i=0$), ma verrebbe prodotta una coppia nulla.

Nei motori sincroni a magneti permanenti la condizione di massima coppia a parità di modulo di corrente di statore si otteneva controllando la fase della corrente, ed in particolare imponendo che essa fosse in quadratura con il campo magnetico di rotore ($\alpha_i=\pi/2$). Si noti che nel motore asincrono non è più possibile agire in questo modo, perchè imponendo $\alpha_i=\pi/2$ si annullerebbe il flusso di rotore (eq.7). Sostituendo la (9) nella (10) si ottiene

$$T = \frac{3}{2} p \frac{L_m}{L_r} |i_s|^2 \sin(\alpha_i) \cos(\alpha_i) \quad (11)$$

La condizione di massima coppia a parità di corrente nel caso del motore asincrono si ha allora scegliendo l'angolo $\alpha_i=\pi/4$, che massimizza il prodotto $\sin(\alpha_i)\cos(\alpha_i)$. Questa condizione non è quella che normalmente si prende il nome di orientamento di campo per gli azionamenti con motore asincrono. Infatti, quest'ultima tende a mantenere un campo costante e vicino al nominale, per ottimizzare lo sfruttamento



magnetico del motore. I due diversi metodi operativi, che hanno diretto impatto sugli algoritmi di controllo, sono schematizzati in Fig.2.

Si può notare come a parità di richiesta di coppia (casi 1 e 2) il FOC richiede più corrente di statore

rispetto al "max T/ |Is|". Al variare della coppia richiesta dal carico, la tecnica FOC non varia l'ampiezza del il flusso di rotore, che è legato a circuiti con costanti di tempo elevate. In questo modo si ottimizzano le prestazioni dinamiche dell'azionamento, ed è per questo che il FOC viene universalmente impiegato al posto della più efficiente tecnica "max T/ |Is|". I metodi di controllo che valutano e controllano le fasi dei fasori delle grandezze coinvolte, e che quindi usano estesamente la formula (10) si dicono metodi di controllo vettoriale. In alternativa, esistono e sono molto diffusi metodi di controllo più semplici, che si basano su una formulazione classica delle equazioni del motore, che porta alla creazione di un circuito elettrico equivalente del motore asincrono. Il circuito equivalente può essere ricavato manipolando opportunamente le eq. (6) e (8). Dalla seconda delle (6) si trova:

$$\dot{\Lambda}_r = \frac{R_r \dot{I}_r}{j(\Omega_{me} - \Omega_s)} \quad \rightarrow \quad -j\Omega_{me} \dot{\Lambda}_r = \frac{-j\Omega_{me} R_r \dot{I}_r}{j(\Omega_{me} - \Omega_s)} = R_r \frac{1-s}{s} \dot{I}_r \quad (12)$$

dove si è definito lo scorrimento $s = \frac{\Omega_s - \Omega_{me}}{\Omega_s}$.

Dunque la equazione di tensione di rotore può essere scritta come

$$0 = R_r I_r + j\Omega_s \dot{\Lambda}_r + R_r \frac{1-s}{s} \dot{I}_r = j\Omega_s L_r I_r + j\Omega_s L_m I_s + R_r \dot{I}_r + R_r \frac{1-s}{s} \dot{I}_r \quad (13)$$

Sostituendo poi la (7) nella prima delle (6) si ottiene una espressione più semplice anche per la tensione di statore:

$$\dot{U}_s = R_s \dot{I}_s + j\Omega_s \left(L_s - \frac{L_m^2}{L_r} \right) \dot{I}_s + j\Omega_s \frac{L_m}{L_r} (L_r \dot{I}_r + L_m \dot{I}_s) = R_s \dot{I}_s + j\Omega_s L_s \dot{I}_s + j\Omega_s L_m \dot{I}_r \quad (14)$$

E dalla (13) e (14) si può infine derivare il circuito elettrico equivalente del motore asincrono, riportato in Fig.3.

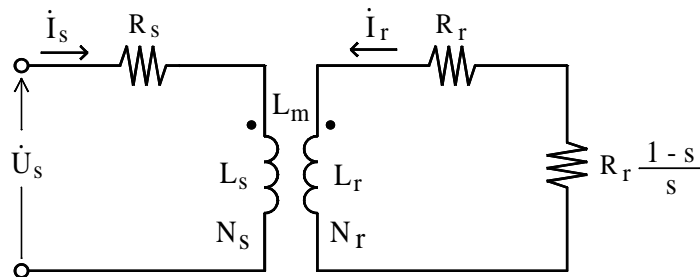


Fig.3 - Circuito elettrico equivalente di una fase del motore asincrono

Con $n=N_s/N_r$ si indica il rapporto di trasformazione tra il numero di spire effettive di una fase di statore N_s e di una di rotore N_r . Si intende che tali valori siano comprensivi dei coefficienti che servono a ricondurre un avvolgimento distribuito ad uno di tipo concentrato agli effetti del calcolo del flusso concatenato con ciascun avvolgimento. La parte di flusso prodotto dallo statore e non trasmesso al rotore è di fatto un flusso disperso, che vale:

$$L_s \dot{I}_s - \frac{L_m \dot{I}_s}{N_r} N_s \quad (15)$$

E' possibile definire l'induttanza di dispersione di statore $L_{\sigma s}$ che, interessata dalla corrente I_s produca tale flusso disperso:

$$L_{\sigma s} = L_s - L_m N_s / N_r \quad (16)$$

In modo del tutto analogo è possibile definire l'induttanza di dispersione del rotore $L_{\sigma r}$ come:

$$L_{\sigma r} = L_r - \frac{L_m}{N_s / N_r} \quad (17)$$

Alcuni passaggi algebrici, qui omessi per semplicità, portano alla definizione di un circuito elettrico equivalente derivato da quello di Fig.3:

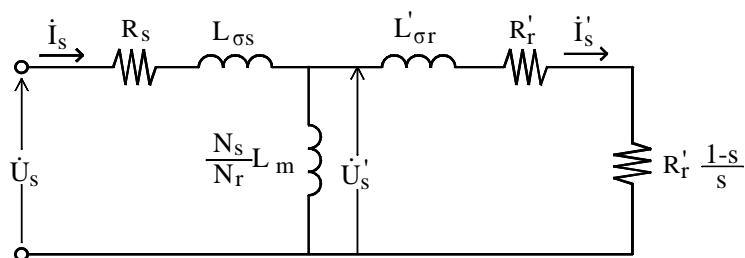


Fig.4 - Circuito equivalente di una fase del motore, in regime sinusoidale

Dove si sono indicate $L'_{\sigma r} = n^2 L_{\sigma r}$ e $R'_r = n^2 R_r$. Spesso all'induttanza $N_s L_m / N_r$ viene dato il nome di *induttanza principale di statore*, intendendo che quando essa è interessata dalla corrente di statore I_s produce il flusso concatenato che, sommato a quello disperso generato da L_{σ} , compone l'intero flusso concatenato prodotto dalle correnti statoriche Λ_s (eq.16). Facendo attenzione a non travisare il significato dei termini, all'induttanza principale di statore si può associare il *flusso concatenato al traferro* prodotto dallo statore. Si può dimostrare che la potenza dissipata su R'_r $(1-s)/s$ continui a rappresentare la potenza meccanica, in questo caso relativa ad una fase del motore, in regime sinusoidale. Osservando la Fig.4 si può scrivere allora:

$$|I'_s|^2 = \frac{|U'_s|^2}{\left(\frac{R'_r}{s}\right)^2 + (\Omega_s L'_{\sigma r})^2} = \frac{s^2 |U'_s|^2}{(R'_r)^2 + (s \Omega_s L'_{\sigma r})^2} = \frac{s^2 |U'_s|^2}{n^4 [(R_r)^2 + (s \Omega_s L_{\sigma r})^2]} \quad (18)$$

$$P_{mecc} = \frac{3}{2} R'_r \frac{1-s}{s} |I'_s|^2 = \frac{3}{2} n^2 R_r \frac{1-s}{s} \frac{s^2 |U'_s|^2}{n^4 [(R_r)^2 + (s \Omega_s L_{\sigma r})^2]} = \frac{3}{n^2} R_r (1-s) \frac{|U'_s|^2}{2 [(R_r)^2 + (s \Omega_s L_{\sigma r})^2]}$$

A questo punto si può notare che vale la relazione:

$$(1-s) = \left(1 - \frac{\Omega_s - \Omega_{me}}{\Omega_s}\right) = \frac{\Omega_{me}}{\Omega_s} = \frac{p \Omega_m}{\Omega_s}$$

che, sostituita nell'espressione della potenza meccanica, porge:

$$P_{mecc} = \frac{3}{n^2} p \Omega_m \left(\frac{U'_s, eff}{\Omega_s}\right)^2 \frac{(\Omega_s - p \Omega_m) R_r}{(R_r)^2 + (s \Omega_s L_{\sigma r})^2} = T \cdot \Omega_m$$

e quindi l'espressione della coppia risulta

$$T = \frac{3p}{n^2} \left(\frac{U'_s, eff}{\Omega_s}\right)^2 \frac{(\Omega_s - p \Omega_m) R_r}{(R_r)^2 + (s \Omega_s L_{\sigma r})^2} \quad (19)$$

Tale funzione di Ω_m può essere studiata con i mezzi classici dell'analisi matematica. In particolare, uguagliando a zero la derivata dell'espressione della coppia in funzione della velocità meccanica Ω_m si trova il punto di massimo della caratteristica meccanica del motore asincrono. Si tenga presente che $s \Omega_s = (\Omega_s - p \Omega_m)$.

$$\frac{\partial T}{\partial \Omega_m} = \frac{-p \left[(R_r)^2 + (s \Omega_s L_{\sigma r})^2 \right] + s \Omega_s \cdot 2 s \Omega_s L_{\sigma r}^2 p}{\left[(R_r)^2 + (s \Omega_s L_{\sigma r})^2 \right]^2} \cdot \frac{3p}{n^2} \left(\frac{U'_s, eff}{\Omega_s}\right)^2 R_r = 0$$

Il massimo si ha quando

$$(R_r)^2 + (s \Omega_s L_{\sigma r})^2 = 2 (s \Omega_s)^2 L_{\sigma r}^2 \rightarrow R_r^2 = (s \Omega_s)^2 L_{\sigma r}^2 \rightarrow (\Omega_s - p \Omega_m)^2 = \frac{R_r^2}{L_{\sigma r}^2}$$

Dividendo ambo i membri per Ω_s si trova l'espressione dello scorrimento al quale si ha la coppia massima, che vale

$$s_{max} = \frac{R_r}{\Omega_s L_{\sigma r}} \quad \text{e corrispondentemente} \quad T_{max} = \frac{3p}{n^2} \left(\frac{U'_s, eff}{\Omega_s}\right)^2 \frac{1}{2 L_{\sigma r}} \quad (20)$$

Si può osservare come lo scorrimento di coppia massima NON dipenda dalla tensione di alimentazione, ma solo dai parametri del motore e dalla pulsazione sincrona. Allo stesso modo, è importante notare come la massima coppia ottenibile non dipenda dalla resistenza di rotore, ma solo dalla sua induttanza di dispersione.