

### 3 PRINCIPI DI CONVERSIONE ELETTROMECCANICA DELL'ENERGIA

#### 3.1 Modellistica di un attuatore elettromeccanico

Per introdurre i fondamenti della conversione elettromeccanica dell'energia consideriamo la struttura elementare illustrata in Fig. 3.1, nota come *attuatore elementare a riluttanza*.

In essa sono individuabili gli elementi di base dei sistemi di conversione elettromeccanici: una struttura fissa (*statore*) ed una mobile (*rotore*) in materiale ferromagnetico; degli *avvolgimenti* che hanno il compito di generare il flusso magnetico necessario al funzionamento del sistema, ed uno spazio in aria (*traferro*) disposto tra statore e rotore per consentire il movimento.

Nel caso particolare dell'attuatore a riluttanza abbiamo un solo avvolgimento disposto sullo statore ed un rotore sagomato (non cilindrico).

Una volta alimentato l'avvolgimento di statore, si genera un flusso (detto "principale") che oltrepassa il traferro, attraversa il rotore e si richiude attraverso lo statore.

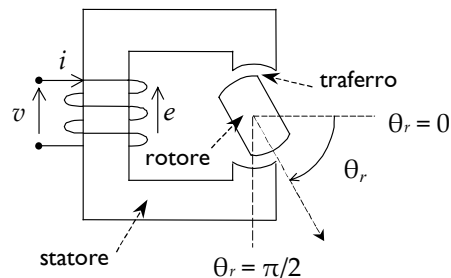


Fig. 3.1 - Sistema elettromeccanico elementare

Per effetto del flusso si genera una coppia (*coppia elettromagnetica*) che tende ad allineare il rotore con la posizione  $\theta_r = \pi/2$  indicata in figura (posizione *allineata*). In questa trattazione ci proponiamo di collegare, sia in termini qualitativi che analitici, la coppia alle grandezze elettriche che la generano (flusso e corrente).

##### 3.1.1 Equazioni elettriche

Dal punto di vista elettrico l'equazione che descrive il sistema è rappresentata dall'equilibrio delle tensioni nell'avvolgimento:

$$v = R i + e \quad (3.1)$$

dove:

- $v$  tensione applicata all'avvolgimento (in Volt, [V])
- $i$  corrente nell'avvolgimento (in Ampere, [A])
- $R$  resistenza dell'avvolgimento (in Ohm, [ $\Omega$ ])
- $e$  tensione indotta nell'avvolgimento,

che in base alla legge di *Faraday-Neumann-Lenz* scritta con la convenzione dell'utilizzatore (*C.d.U*) è data da:

$$e = \frac{d\psi}{dt} \quad (3.2)$$

dove  $\psi$  è il flusso concatenato con l'avvolgimento<sup>1</sup> (in Weber, [Wb]).

È interessante comprendere, qualitativamente, la relazione esistente tra il flusso concatenato e la corrente. Come noto, tali grandezze sono legate dalla *Legge di Hopkinson* dei circuiti magnetici:

$$Ni = \mathfrak{R} \phi, \quad \rightarrow \quad N^2 i = \mathfrak{R} \psi \quad (3.3)$$

dove  $\mathfrak{R}$  è la riluttanza del circuito magnetico, definita dalla:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\mu} \frac{L}{S} \quad (3.4)$$

essendo  $L$  ed  $S$  rispettivamente la *lunghezza* e la *sezione* del tubo di flusso,  $\mu$  la permeabilità del mezzo.

Nel caso in esame, la riluttanza del circuito magnetico dipende dalla posizione del rotore. In particolare al variare di  $\theta_r$  varierà la lunghezza del percorso in aria (che presenta una permeabilità piccola e costante) rispetto a quella del percorso in ferro (che presenta una permeabilità elevata ma variabile per effetto del fenomeno della saturazione).

Di conseguenza si può affermare che nella posizione *non allineata* ( $\theta_r = 0$ ) in cui il traferro è grande, il flusso (a pari corrente) sarà più piccolo ma varierà linearmente con la corrente; mentre nella posizione *allineata* ( $\theta_r = \pi/2$ ), dove invece il traferro è piccolo, il flusso sarà più grande ma soggetto a saturazione per correnti elevate.

Le caratteristiche flusso/corrente sono indicate nella seguente Fig. 3.2<sup>2</sup>.

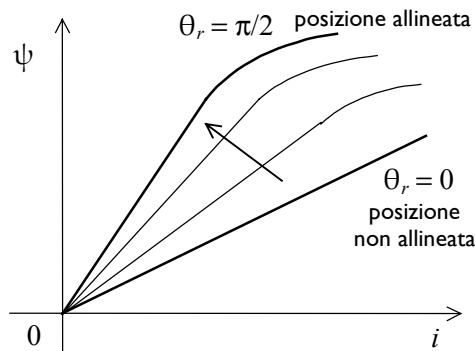


Fig. 3.2 - Caratteristica magnetica del sistema elettromeccanico elementare

Evidentemente, le due situazioni illustrate rappresentano le posizioni limite del sistema, nel senso che a tutte le altre posizioni corrisponderanno caratteristiche intermedie.

<sup>1</sup> Il flusso concatenato è esprimibile come  $\psi = N\phi$ , dove  $\phi$  è il flusso principale,  $N$  il numero di spire dell'avvolgimento

<sup>2</sup> Si osservi che, in un sistema del genere, l'energia magnetica è immagazzinata prevalentemente nel traferro. Ciò si comprende dall'espressione della densità di energia magnetica

$$w' = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \left[ \frac{\text{Joule}}{\text{m}^3} \right]$$

in cui si ha  $\mu_o \ll \mu_{fe}$ , mentre l'induzione  $B = \phi/S$  è costante in tutto il tubo di flusso.

L'insieme di queste caratteristiche (cioè il legame flusso/corrente) insieme all'equazione della tensione rappresenta il *modello elettrico del sistema*:

$$v = R i + \frac{d\psi}{dt} \tag{3.5}$$

$$\psi = \psi(i, \theta_r)$$

### 3.1.2 Bilancio di energia

Consideriamo il sistema elettromeccanico durante il generico intervallo di tempo elementare  $dt$  di funzionamento, nel quale si verifichi uno spostamento  $d\theta_r$ : la corrente, il flusso e la posizione, che determinano il *punto di lavoro* ( $P$ ) del sistema nel piano  $\psi$ - $i$ , possono variare in modo del tutto generale come indicato in Fig. 3.3:

Se consideriamo l'equilibrio delle tensioni e lo moltiplichiamo per  $i dt$  ricaviamo il bilancio di energie elementari del sistema come segue (Fig. 3.4):

$$v i dt = R i^2 dt + i d\psi \tag{3.6}$$

in cui il significato dei singoli termini è il seguente:

$$dW_e = v i dt \tag{3.7}$$

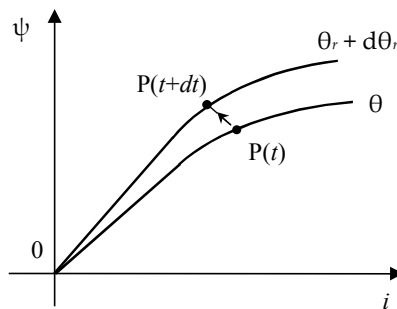


Fig. 3.3 - Spostamento del punto di lavoro sulla caratteristica magnetica

è l'energia elettrica complessivamente fornita dalla sorgente di alimentazione al sistema nell'intervallo di tempo  $dt$ ,

$$dW_J = R i^2 dt \tag{3.8}$$

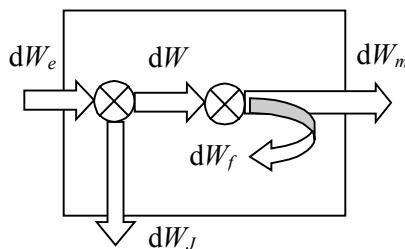


Fig. 3.4 - Bilancio di energia di un attuatore elettromeccanico

e la parte di energia dissipata per effetto Joule,

$$dW = i d\psi = dW_f + dW_m \quad (3.9)$$

è la parte di energia elettrica rimanente (*energia netta*), pari alla somma della *variazione di energia immagazzinata nel campo magnetico* ( $dW_f$ ) e dell'*energia meccanica* ( $dW_m$ ) resa all'asse.

In particolare, essendo il sistema dotato di moto rotatorio, l'energia meccanica è esprimibile come il lavoro meccanico compiuto dalla coppia  $C$  nella direzione dello spostamento  $d\theta_r$ :

$$dW_m = C d\theta_r \quad (3.10)$$

### 3.1.3 Energia magnetica immagazzinata. Coenergia

Per calcolare l'energia magnetica immagazzinata, immaginiamo di mantenere fisso il rotore in una generica posizione ( $\theta_r = 0$ ). In questo caso l'energia elettrica netta fornita dall'alimentazione, non potendosi trasformare in energia meccanica (che richiede un movimento) si traduce in variazione dell'energia immagazzinata nel campo magnetico, cioè:

$$dW = i d\psi = dW_f \quad (3.11)$$

Facendo il bilancio energetico nell'intervallo temporale  $[0, t]$  si ricava:

$$\begin{array}{l} \text{energia elettrica} \\ \text{fornita dal generatore} \end{array} \quad W_e = \int_0^t v i dt \quad (3.12)$$

$$\begin{array}{l} \text{energia elettrica dissipata nella} \\ \text{resistenza} \end{array} \quad W_J = \int_0^t R i^2 dt \quad (3.13)$$

$$\begin{array}{l} \text{energia immagazzinata nel} \\ \text{campo magnetico} \end{array} \quad W = W_e - W_J = W_f = \int_0^\psi i d\psi \quad (3.14)$$

L'energia magnetica è quindi rappresentabile sul piano  $\psi$ - $i$  come l'area compresa tra l'asse del flusso e la caratteristica di magnetizzazione di funzionamento, Fig. 3.5.

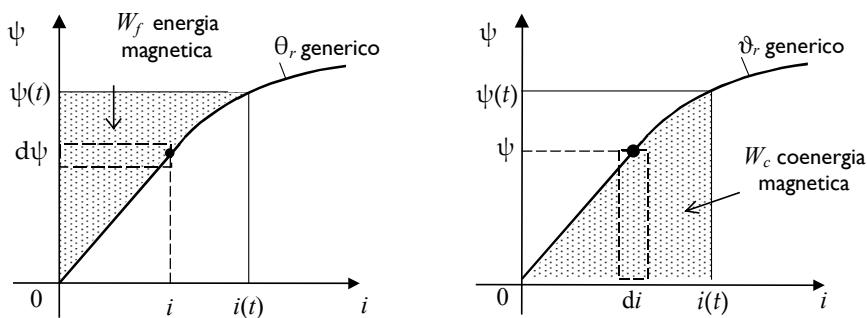


Fig. 3.5 - Definizione dell'energia e della coenergia magnetica nel piano flusso-corrente

Parallelamente all'energia magnetica è possibile definire la *coenergia magnetica*:

$$W_c = \int_0^i \psi di \quad (3.15)$$

graficamente pari all'area compresa tra l'asse della corrente e la curva di magnetizzazione, Fig. 3.5.

Evidentemente, l'energia e la coenergia magnetica sono legate dalla relazione:

$$W_f + W_c = i\psi \quad (3.16)$$

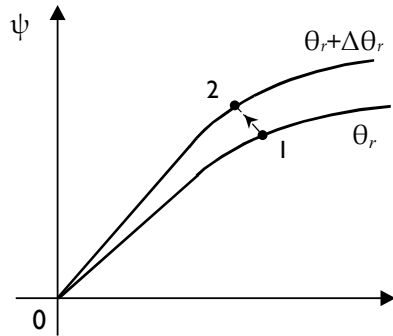


Fig. 3.6 - Variazione del punto di lavoro sulle caratteristiche flusso-corrente

### 3.1.4 Espressione della coppia elettromagnetica

Il sistema elettromeccanico, nel generico intervallo di tempo di funzionamento  $\Delta t$ , modifica il suo punto di funzionamento con variazione di corrente, flusso e posizione (spostamento 1→2 come indicato in Fig. 3.6).

Per ricavare l'energia meccanica (e quindi la coppia elettromagnetica) possiamo però considerare due modalità di spostamento particolari, a *flusso costante* ed a *corrente costante*.

#### 3.1.4.1 Spostamento a flusso costante

Se lo spostamento avviene a flusso costante ( $d\psi = 0$ ) l'energia elettrica netta fornita al sistema è nulla ( $dW = id\psi = 0$ ) ed il bilancio energetico fornisce:

$$dW = 0 = dW_f + dW_m \quad (3.17)$$

A flusso costante, quindi, l'energia meccanica è pari (a meno del segno) alla variazione di energia magnetica immagazzinata:

$$dW_m = C d\theta_r = -dW_f \Big|_{\psi=\text{costante}} \quad (3.18)$$

Poiché l'energia magnetica è funzione di più variabili (posizione, corrente e flusso, queste ultime legate dalle curve di magnetizzazione) si può scrivere, introducendo le derivate parziali:

$$C = - \frac{\partial W_f}{\partial \theta_r} \Big|_{\psi=\text{costante}} \quad (3.19)$$

che rappresenta una espressione per il calcolo della coppia elettromagnetica particolarmente comoda da utilizzare quando l'energia immagazzinata è espressa in funzione di posizione e flusso  $W_f = W_f(\psi, \theta_r)$ .

Nella Fig. 3.7 è illustrato lo spostamento (finito) a flusso costante da 1→2' ed il calcolo della corrispondente variazione di energia magnetica  $\Delta W_f$  ( $\psi_1$  rappresenta il valore costante del flusso).

energia magnetica al punto 1  $W_{f(1)} = \int_0^{\psi_1} i d\psi \Big|_{\text{curva } \theta_r} = \text{area } (0130)$  (3.20)

energia magnetica al punto 2'  $W_{f(2')} = \int_0^{\psi_1} i d\psi \Big|_{\text{curva } (\theta_r + \Delta\theta_r)} = \text{area } (02'30)$  (3.21)

variazione dell'energia magnetica  $\Delta W_f = W_{f(2')} - W_{f(1)} = - \text{area } (012'0)$  (3.22)

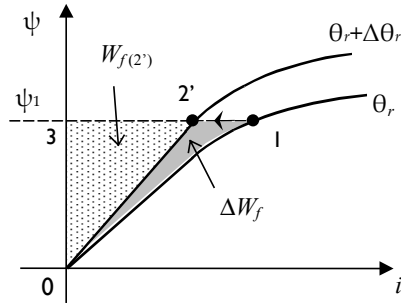


Fig. 3.7 - Spostamento a flusso costante

**3.1.4.2 Spostamento a corrente costante**

In questo caso l'energia elettrica netta fornita durante lo spostamento non è nulla ( $dW = id\psi \neq 0$ ) ed occorrerà considerarla nel ricavare l'energia meccanica dal bilancio energetico, ottenendo:

$$dW_m = dW - dW_f \tag{3.23}$$

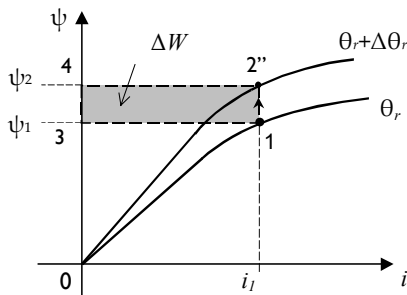


Fig. 3.8 - Spostamento a corrente costante

Riferendoci per comodità allo spostamento finito a corrente costante 1→2'' illustrato in Fig. 3.8, è possibile ricavare graficamente le energie in gioco come segue:

*energia elettrica  
netta fornita*  $\Delta W = \int_{\psi_1}^{\psi_2} i d\psi \Big|_{i, \text{ costante}} = i_1 (\psi_2 - \psi_1) = \text{area } (12''43)$  (3.24)

*energia magnetica  
al punto 1*  $W_{f(1)} = \int_0^{\psi_1} i d\psi \Big|_{\text{curva } \theta_r} = \text{area } (0130)$  (3.25)

*energia magnetica  
al punto 2''*  $W_{f(2'')} = \int_0^{\psi_2} i d\psi \Big|_{\text{curva } (\theta_r + \Delta\theta_r)} = \text{area } (02''40)$  (3.26)

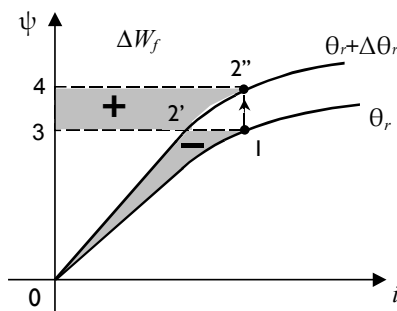


Fig. 3.9 - Variazione dell'energia magnetica

*variazione di  
energia magnetica*  $\Delta W_f = W_{f(2'')} - W_{f(1)} = \text{area } (2''432') - \text{area } (012'0)$  (3.27)

dove  $\psi_1$  e  $\psi_2$  sono i valori del flusso nei punti 1 e 2''.

Sostituendo le (3.24) e (3.27) nella (3.23) si ricava graficamente:

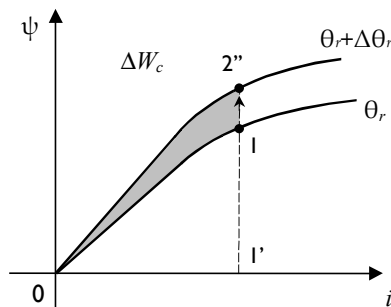


Fig. 3.10 - Variazione della coenergia magnetica

$$\begin{aligned}\Delta W_m &= \text{area}(12''43) - \text{area}(2''432') + \text{area}(012'0) = \\ &= \text{area}(012''0) = \Delta W_c\end{aligned}\quad (3.28)$$

Pertanto se lo spostamento avviene a corrente costante, l'energia meccanica è pari alla variazione della coenergia magnetica  $\Delta W_c$ , cioè in termini differenziali:

$$dW_m = C d\theta_r = dW_c \Big|_{i=\text{costante}} \quad (3.29)$$

Introducendo le derivate parziali si ottiene:

$$C = \frac{\partial W_c}{\partial \theta_r} \Big|_{i=\text{costante}} \quad (3.30)$$

che rappresenta una espressione per il calcolo della coppia elettromagnetica particolarmente comoda da utilizzare quando la coenergia è espressa in funzione di posizione e corrente:  $W_c = W_c(i, \theta_r)$ .<sup>3</sup>

### 3.1.5 Sistemi lineari

Nei sistemi lineari (Fig. 3.11) la relazione flusso-corrente è una retta per ogni posizione relativa tra statore e rotore. È facile verificare che in queste condizioni l'energia e la coenergia magnetica coincidono:

$$W_f = W_c \quad (3.31)$$

e dalla relazione generale (3.16) si ricava:

$$W_f = W_c = \frac{1}{2} i \psi \quad (3.32)$$

Tale relazione semplifica di molto le trattazioni e verrà usata estesamente nel seguito. Ad esempio, la coppia elettromagnetica può essere espressa in funzione della sola energia magnetica, ricavando le relazioni:

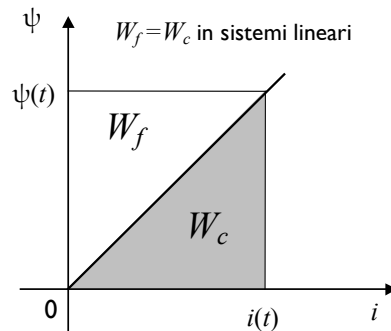


Fig. 3.11 - Energia e coenergia magnetica in sistemi lineari

<sup>3</sup> È possibile dimostrare che, se lo spostamento fosse effettuato con flusso e corrente entrambi variabili (caso generale), le relazioni (3.30) ottenute sono ancora valide, considerando lo studio al limite per  $d\theta \rightarrow 0$  (compaiono degli infinitesimi di ordine superiore che sono trascurabili).

$$C = \left. \frac{\partial W_f}{\partial \theta_r} \right|_{i=\text{costante}} \quad (3.33)$$

$$C = - \left. \frac{\partial W_f}{\partial \theta_r} \right|_{\psi=\text{costante}} \quad (3.34)$$

Va usata una espressione o l'altra a seconda che l'energia sia espressa in funzione del flusso (si usa la formula (3.34) e si deriva rispetto alla posizione tenendo il flusso costante) oppure in funzione della corrente (si usa la formula (3.33) e si deriva rispetto alla posizione tenendo la corrente costante). Questo secondo caso è il più comune, poiché le correnti sono grandezze più facilmente individuabili (misurabili) e sono assunte come variabili indipendenti, mentre il flusso è calcolato da esse.

### 3.1.6 Calcolo della coppia per l'attuatore elementare a riluttanza

Applichiamo la formula generale per il calcolo della coppia elettromagnetica al caso dell'*attuatore a riluttanza* di Fig. 3.1<sup>4</sup>. Assumiamo l'ipotesi semplificativa che il sistema sia lineare, supponendo ad esempio che la corrente non raggiunga valori tali da mandare in saturazione il flusso. Le caratteristiche flusso-corrente  $\psi$ - $i$  sono pertanto lineari come illustrato in Fig. 3.12.

In tal caso il legame tra flussi e correnti può esprimersi come:

$$\psi = L(\theta_r) i \quad (3.35)$$

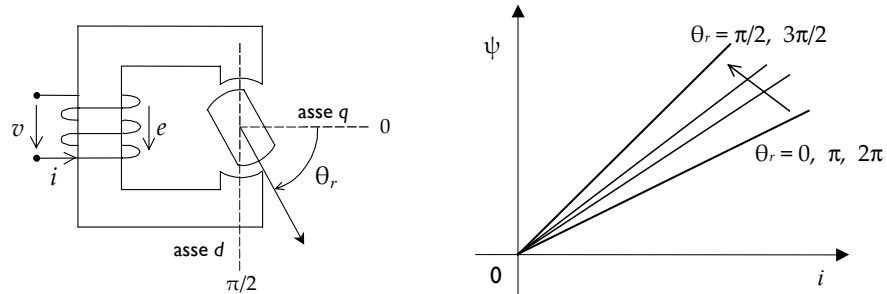


Fig. 3.12 - Caratteristiche magnetiche dell'attuatore a riluttanza (supposto lineare)

dove l'induttanza  $L(\theta_r)$  rappresenta la pendenza delle varie caratteristiche funzione della posizione angolare<sup>5</sup>.

Si può indicare qualitativamente l'andamento di tale induttanza, riflettendo sul fatto che nella posizione allineata (*asse d*) l'induttanza è maggiore che nella posizione non allineata (*asse q*)<sup>6</sup>. Indicando con  $L_d$  ed  $L_q$  tali valori di induttanza, ed assumendo una variazione sinusoidale<sup>7</sup> con l'angolo si ottiene l'andamento in Fig. 3.14, periodico con periodo di  $\pi$ .

<sup>4</sup> Questo semplice attuatore può schematizzare il funzionamento di un motore sincrono a riluttanza commutata ("switched reluctance") oppure di un motore passo-passo a riluttanza.

<sup>5</sup> L'induttanza  $L$  è definita come  $L=N^2P$ , dove  $P=\mathcal{R}^{-1}$  è la permeanza del circuito magnetico (inverso della riluttanza). Nel caso particolare si ha  $P=P(\theta_r)$  e quindi anche  $L=L(\theta_r)$ .

<sup>6</sup> La permeanza lungo l'asse  $d$  è maggiore di quella lungo l'asse  $q$ , pertanto  $L_d=N^2P(\pi/2) > L_q=N^2P(0)$

<sup>7</sup> L'andamento reale dipende dalla geometria delle superfici esposte di statore e rotore.

$$L(\theta_r) = L_0 - \hat{L} \cos(2\theta_r) \quad (3.36)$$

con:

$$L_0 = \frac{(L_d + L_q)}{2} \quad \hat{L} = \frac{(L_d - L_q)}{2} \quad (3.37)$$

rispettivamente valore medio ed ampiezza del valore alternato.

Per il calcolo della coppia elettromagnetica possiamo utilizzare la relazione (3.33) del paragrafo precedente:

$$C = \left. \frac{\partial W_f}{\partial \theta_r} \right|_{i=\text{costante}} \quad (3.38)$$

valida per i soli sistemi lineari.

In essa, per ricavare una espressione in forma chiusa, dobbiamo esplicitare l'energia immagazzinata nel campo magnetico  $W_f$ . Per sistemi lineari questo è possibile con relativa semplicità. Sostituendo la (3.35) nella (3.32) si ricava:

$$W_f = \frac{1}{2} L(\theta_r) i^2 \quad (3.39)$$

che è la nota espressione dell'energia magnetica immagazzinata in sistemi lineari.

Sostituendo nell'espressione della coppia (3.33) la (3.39) e derivando rispetto la posizione (a corrente costante) la funzione di due variabili  $W_f(i, \theta_r)$ <sup>8</sup> si ricava:

$$C = \frac{1}{2} \frac{dL(\theta_r)}{d\theta_r} i^2 \quad (3.40)$$

che è l'espressione della coppia nell'attuatore elementare a riluttanza.

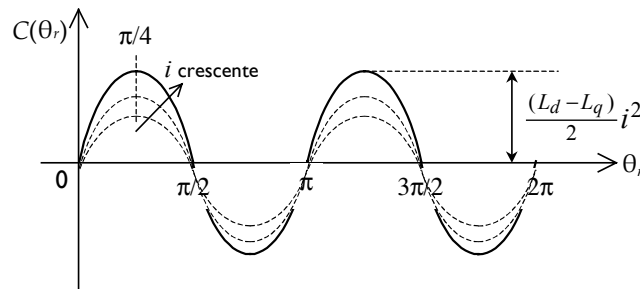


Fig. 3.13 - Caratteristica coppia-posizione dell'attuatore a riluttanza

<sup>8</sup> Differenziando la (3.39) si ha

$$dW_f(i, \theta_r) = \left. \frac{\partial W_f}{\partial i} \right|_{\theta_r=\text{cost.}} di + \left. \frac{\partial W_f}{\partial \theta_r} \right|_{i=\text{cost.}} d\theta_r = \frac{1}{2} \left[ (L(\theta_r) \cdot 2i) di + \left( \frac{dL(\theta_r)}{d\theta_r} i^2 \right) d\theta_r \right]$$

da cui per confronto si ricava che

$$C = \left. \frac{\partial W_f}{\partial \theta_r} \right|_{i=\text{cost.}} = \frac{1}{2} \frac{dL(\theta_r)}{d\theta_r} i^2$$

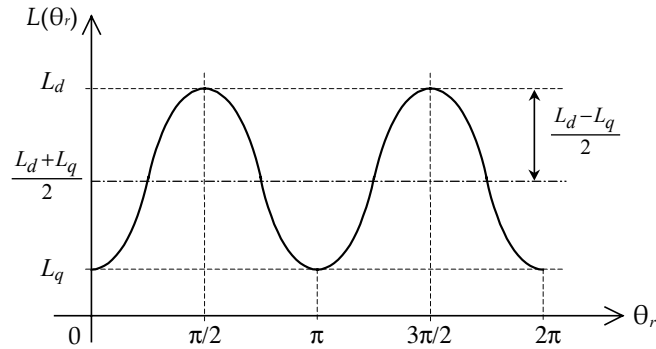


Fig. 3.14 - Variazione con la posizione dell'induttanza nell'attuatore a riluttanza

Sostituendo l'espressione (3.36) dell'induttanza  $L(\theta_r)$  e facendone la derivata rispetto  $\theta_r$  si ottiene l'espressione della coppia in funzione dei parametri  $L_d$  ed  $L_q$  che caratterizzano l'oggetto specifico

$$C = i^2 \cdot \frac{(L_d - L_q)}{2} \sin(2\theta_r) \tag{3.41}$$

È facile osservare che in caso di rotore cilindrico ( $L_d = L_q$ ) la coppia sarebbe costantemente nulla, l'oggetto non avrebbe le caratteristiche di un attuatore elettromeccanico<sup>9</sup>.

### 3.1.7 Modello dinamico dell'attuatore elementare a riluttanza

Il modello dinamico dell'attuatore elettromeccanico a riluttanza è composto dalle equazioni elettriche, le equazioni meccaniche e l'espressione della coppia elettromagnetica. Le equazioni elettriche sono

$$\begin{array}{l} \text{equilibrio tensioni} \\ \text{avvolgimento} \end{array} \qquad v = R i + \frac{d\psi}{dt} \tag{3.42}$$

$$\begin{array}{l} \text{relazione flusso} \\ \text{concatenato-corrente} \end{array} \qquad \psi = L(\theta_r) i \tag{3.43}$$

Da queste relazioni si ottiene il modello differenziale elettrico, che può essere espresso in funzione dei flussi o delle correnti. Sostituendo il flusso (3.43) nella (3.42), ad esempio, si ottiene il modello in funzione delle correnti

$$v = R i + \frac{d}{dt} (L(\theta_r) \cdot i) = R i + L(\theta_r) \frac{di}{dt} + i \frac{dL(\theta_r)}{d\theta_r} \frac{d\theta_r}{dt} \tag{3.44}$$

dove essendo  $\omega_r = d\theta_r / dt$  la velocità di rotazione si ottiene:

$$v = R i + L(\theta_r) \frac{di}{dt} + i \frac{dL(\theta_r)}{d\theta_r} \omega_r \tag{3.45}$$

<sup>9</sup> Con rotore cilindrico si avrebbe una sola caratteristica magnetica, senza dipendenza dalla posizione, quindi nessuna possibilità di associare energia meccanica.

I            II

Il termine (I) rappresenta la *forza elettromotrice indotta di tipo trasformatorico*, vale a dire dovuta alle variazioni della sola corrente; il termine (II) rappresenta la *forza elettromotrice indotta di tipo mozionale*, dovuta al movimento.

Il modello dinamico dell'attuatore è completato dalle *equazioni meccaniche*:

$$\begin{aligned} C - C_R &= J \frac{d\omega_r}{dt} \\ \omega_r &= \frac{d\theta_r}{dt} \end{aligned} \quad (3.46)$$

in cui va specificata l'espressione della coppia elettromagnetica:

$$C = \frac{1}{2} \frac{dL(\theta_r)}{d\theta_r} i^2 \quad (3.47)$$

Dalle (3.45), (3.46) e (3.47), introducendo l'espressione analitica (3.36) di  $L(\theta_r)$ , si ricava un modello differenziale del I° ordine avente per incognite (*variabili di stato*) la corrente  $i$ , la velocità  $\omega_r$  e la posizione  $\theta_r$ , e come termine noto (*ingresso*) la tensione  $v$ . Il flusso (*uscita*) può essere ricavato dalla variabile di stato corrente tramite la (3.43).

Il modello differenziale è non lineare, in quanto sono presenti prodotti, potenze e funzioni non lineari delle variabili di stato.

### 3.2 Attuatori con avvolgimenti multipli

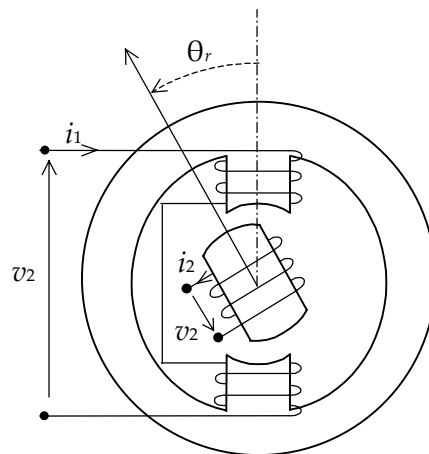


Fig. 3.15 - Attuatore elettromeccanico con avvolgimenti su statore e rotore

Facciamo un passo avanti nell'analisi di strutture di attuatori elettromeccanici considerando l'esempio in Fig. 3.15.

Benché geometricamente diversa rispetto l'attuatore elementare a riluttanza presentato in Fig. 3.1, tale struttura ha la sola, importante novità del secondo avvolgimento sul rotore. Sarà presa ad esempio come struttura con avvolgimenti multipli.

### 3.2.1 Equazioni elettriche

Dal punto di vista elettrico, il sistema può essere schematizzato considerando le *equazioni elettriche dei due avvolgimenti* e le *relazioni di accoppiamento magnetico* tra di essi:

$$\begin{array}{l} \text{tensioni di statore} \\ \end{array} \quad v_1 = R_1 i_1 + \frac{d\psi_1}{dt} \quad (3.48)$$

$$\begin{array}{l} \text{tensioni di rotore} \\ \end{array} \quad v_2 = R_2 i_2 + \frac{d\psi_2}{dt} \quad (3.49)$$

dove  $\psi_1$  e  $\psi_2$  sono i totali *flussi concatenati* gli avvolgimenti di statore e di rotore rispettivamente, che espressi (in ipotesi di linearità) in funzione dei coefficienti di induzione magnetica si scrivono:

$$\psi_1 = \psi_{11} + \psi_{12} = L_1(\theta_r) i_1 + M_{12}(\theta_r) i_2 \quad (3.50)$$

$$\psi_2 = \psi_{21} + \psi_{22} = M_{21}(\theta_r) i_1 + L_2(\theta_r) i_2 \quad (3.51)$$

dove

$$\psi_{11} = L_1(\theta_r) i_1, \quad \psi_{22} = L_2(\theta_r) i_2 \quad (3.52)$$

sono i *flussi propri*<sup>10</sup> di statore e rotore rispettivamente tenuti in conto dai *coefficienti di induttanza propria* (o *auto-induttanza*)  $L_1$  ed  $L_2$ ;

$$\psi_{12} = M_{12}(\theta_r) i_2, \quad \psi_{21} = M_{21}(\theta_r) i_1 \quad (3.53)$$

sono i *flussi mutui*<sup>11</sup> di statore e rotore rispettivamente tenuti in conto dai *coefficienti di induttanza mutua* (o *mutue-induttanza*)  $M_{12}$  ed  $M_{21}$ .

Le tensioni (3.48)-(3.49) ed i flussi concatenati (3.50)-(3.51) possono scriversi in forma compatta introducendo la notazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \rightarrow v = \mathbf{R} \mathbf{i} + \frac{d\boldsymbol{\Psi}}{dt} \quad (3.54)$$

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1(\theta_r) & M_{12}(\theta_r) \\ M_{21}(\theta_r) & L_2(\theta_r) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{L}(\theta_r) \mathbf{i} \quad (3.55)$$

dove:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

sono i *vettori delle tensioni, correnti e flussi concatenati*,

<sup>10</sup> Il flusso proprio è la quota-parte del flusso concatenato con un avvolgimento dovuto alla corrente che scorre nell'avvolgimento stesso

<sup>11</sup> Il flusso mutuo è la quota-parte del flusso concatenato con un avvolgimento dovuto alla corrente che scorre in un altro avvolgimento. Poiché il *tubo di flusso mutuo* tra due avvolgimenti è lo stesso, si ha  $M_{12}=M_{21}=M$ .

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}(\theta_r) = \begin{bmatrix} L_1(\theta_r) & M_{12}(\theta_r) \\ M_{21}(\theta_r) & L_2(\theta_r) \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

sono le matrici delle resistenze e delle induttanze degli avvolgimenti<sup>12</sup>.

### 3.2.2 Energia magnetica

Per il calcolo della coppia elettromagnetica sviluppata da un attuatore con avvolgimenti multipli si possono utilizzare le espressioni generali ricavate al paragrafo 3.1.6. In particolare occorre calcolare l'energia magnetica complessivamente immagazzinata nel sistema, dovuta cioè al contributo di tutti gli avvolgimenti presenti.

Estendendo la trattazione al caso generale di  $N$  avvolgimenti l'energia magnetica complessiva può scriversi come:

$$W_f = \sum_{k=1}^N W_{fk} \quad (3.58)$$

dove  $W_{fk}$  è l'energia magnetica immagazzinata nel  $k$ -esimo avvolgimento, per la quale vale la relazione generale:

$$W_{fk} + W_{ck} = i_k \psi_k \quad (3.59)$$

Sommando la (3.59) per tutti gli avvolgimenti ed utilizzando la notazione matriciale si ottiene

$$\sum_{k=1}^N (W_{fk} + W_{ck}) = \sum_{k=1}^N i_k \psi_k = i_1 \psi_1 + i_2 \psi_2 + \dots + i_n \psi_n = \mathbf{i}^T \cdot \boldsymbol{\Psi} \quad (3.60)$$

dove:

$$\mathbf{i}^T = [i_1 \quad i_2 \quad \dots \quad i_N], \quad \boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

sono i vettori delle correnti *trasposto*<sup>13</sup> e del flusso concatenato rispettivamente.

Considerando infine che in sistemi lineari si ha

$$W_{fk} = W_{ck} \quad (3.62)$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{L}(\theta_r) \cdot \mathbf{i} \quad (3.63)$$

dalla (3.60) si ricava:

<sup>12</sup> Costituiscono i *parametri* del sistema, la cui conoscenza è necessaria per descriverne il funzionamento

<sup>13</sup> Con gli elementi disposti in riga anziché in colonna.

$$\sum_{k=1}^N (W_{fk} + W_{ck}) = \sum_{k=1}^N 2W_{fk} = 2W_f = \mathbf{i}^T \cdot \mathbf{L}(\theta_r) \cdot \mathbf{i} \quad (3.64)$$

e quindi l'espressione dell'energia magnetica:

$$W_f = \frac{1}{2} \mathbf{i}^T \cdot \mathbf{L}(\theta_r) \cdot \mathbf{i} \quad (3.65)$$

### 3.2.3 Espressione della coppia elettromagnetica

Possiamo calcolare la coppia elettromagnetica utilizzando l'espressione generale ricavata al 3.1.6

$$C = \left. \frac{\partial W_f}{\partial \theta_r} \right|_{\mathbf{i}=\text{costante}} \quad (3.66)$$

valida in ipotesi di linearità.

Sostituendo la (3.65) nella (3.66) si ricava la *coppia elettromagnetica*:

$$C = \left. \frac{\partial W_f}{\partial \theta_r} \right|_{\mathbf{i}=\text{costante}} = \frac{1}{2} \mathbf{i}^T \cdot \frac{d\mathbf{L}(\theta_r)}{d\theta_r} \cdot \mathbf{i} \quad (3.67)$$

Le espressioni (3.65) ed (3.66) sono la generalizzazione delle (3.39) ed (3.40), già ricavate per un attuttore con un solo avvolgimento, al caso generale di sistema elettromeccanico con  $N$  avvolgimenti.

Nel caso particolare dell'attuttore in Fig. 3.15 (un avvolgimento di statore ed uno di rotore) la coppia si esplicita come<sup>14</sup>

$$C = \frac{1}{2} [i_1 \quad i_2] \cdot \frac{d}{d\theta_r} \left( \begin{bmatrix} L_1(\theta_r) & M(\theta_r) \\ M(\theta_r) & L_2(\theta_r) \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

$$C = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_1(\theta_r)}{d\theta_r} + i_1 i_2 \frac{dM(\theta_r)}{d\theta_r} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_2(\theta_r)}{d\theta_r} \quad (3.69)$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{I}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{II}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{III}}$$

In base al tipo di struttura (geometria, particolarità costruttive) la matrice delle induttanze  $L(\theta_r)$  sarà differente e si avranno diverse componenti di coppia. In generale avremo:

- coppie di riluttanza (termini I e III), proporzionali al quadrato della corrente in un solo avvolgimento<sup>15</sup>
- coppie di interazione (termine II), proporzionali al prodotto tra una corrente di statore ed una di rotore.

<sup>14</sup> Consideriamo l'uguaglianza richiamata alla nota II tra le mutue induttanze.

<sup>15</sup> Presenti quando i circuiti magnetici propri si modificano al variare della posizione reciproca tra statore e rotore, cioè in strutture *magneticamente anisotrope*.

### 3.2.4 Modello dinamico

La notazione matriciale ci svincola, a tutti gli effetti, dal numero di circuiti. Il *modello elettrico generalizzato* di un attuatore elettromeccanico lineare avente un numero qualsiasi di avvolgimenti su statore e rotore sarà dunque il seguente:

$$\text{equazioni delle tensioni} \quad v = R i + \frac{d\Psi}{dt} \quad (3.70)$$

$$\text{equazioni dei flussi concatenati} \quad \Psi = L(\theta_r) \cdot i \quad (3.71)$$

$$\text{espressione coppia elettromagnetica} \quad C = \frac{1}{2} i^T \cdot \frac{dL(\theta_r)}{d\theta_r} \cdot i \quad (3.72)$$

Ad esse vanno aggiunte, per la definizione del *modello differenziale completo*, le equazioni meccaniche:

$$\begin{aligned} C - C_R &= J \frac{d\omega_r}{dt} \\ \omega_r &= \frac{d\theta_r}{dt} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Il modello differenziale può essere espresso avendo come grandezze di stato le correnti, quando si sostituiscono le espressioni dei flussi concatenati nelle equazioni delle tensioni. Nel caso dell'attuatore in Fig. 3.15 si ricava (per l'avvolgimento di statore):

$$\begin{aligned} v_1 &= R_1 i_1 + \frac{d}{dt} [L_1(\theta_r) i_1 + M_{12}(\theta_r) i_2] = \\ &= R_1 i_1 + L_1(\theta_r) \frac{di_1}{dt} + i_1 \frac{dL_1(\theta_r)}{d\theta_r} \frac{d\theta_r}{dt} + M_{12}(\theta_r) \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{dM_{12}(\theta_r)}{d\theta_r} \frac{d\theta_r}{dt} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Introducendo la velocità angolare  $\omega_r = d\theta_r/dt$  la e considerando l'analogia relazione per l'avvolgimento di rotore si ha:

$$v_1 = R_1 i_1 + L_1(\theta_r) \frac{di_1}{dt} + M_{12}(\theta_r) \frac{di_2}{dt} + \left( i_1 \frac{dL_1(\theta_r)}{d\theta_r} + i_2 \frac{dM_{12}(\theta_r)}{d\theta_r} \right) \omega_r \quad (3.75)$$

$$v_2 = R_2 i_2 + L_2(\theta_r) \frac{di_2}{dt} + M_{21}(\theta_r) \frac{di_1}{dt} + \left( i_2 \frac{dL_2(\theta_r)}{d\theta_r} + i_1 \frac{dM_{21}(\theta_r)}{d\theta_r} \right) \omega_r \quad (3.76)$$

I
II

Il termine (I) rappresenta la *forza elettromotrice indotta di tipo trasformatore*, vale a dire dovuta alle variazioni della sola corrente; il termine (II) rappresenta la *forza elettromotrice indotta di tipo mozionale*, dovuta al movimento.

### Test di apprendimento

- 1) Descrivere la struttura di un attuatore elettromeccanico nelle sue parti fondamentali
- 2) Indicare e discutere le equazioni elettriche di un attuatore elettromeccanico

- 3) Disegnare e discutere la caratteristica magnetica di un attuatore elementare a riluttanza
- 4) Scrivere il bilancio energetico di un attuatore elettrico
- 5) Definire l'energia e la coenergia magnetica ed indicare le relazioni che le legano
- 6) Ricavare l'espressione della coppia elettromagnetica per uno spostamento a flusso costante
- 7) Ricavare l'espressione della coppia elettromagnetica per uno spostamento a corrente costante
- 8) Cosa si intende per attuatore elettromeccanico *lineare*?
- 9) Disegnare e discutere la caratteristica magnetica di un attuatore elementare a riluttanza lineare
- 10) Indicare, in termini qualitativi ed analitici, l'andamento dell'induttanza dell'attuatore elementare a riluttanza
- 11) Ricavare l'espressione dell'energia magnetica dell'attuatore elementare a riluttanza
- 12) Ricavare e graficare l'espressione della coppia elettromagnetica dell'attuatore elementare a riluttanza
- 13) Presentare e discutere il modello dinamico dell'attuatore elementare a riluttanza
- 14) Presentare le equazioni elettriche di un attuatore elettromeccanico ad avvolgimenti multipli in forma matriciale
- 15) Indicare, qualitativamente ed analiticamente, l'andamento delle induttanze di un attuatore con avvolgimenti su statore e rotore
- 16) Ricavare l'espressione dell'energia magnetica di un attuatore ad avvolgimenti multipli
- 17) Ricavare e discutere l'espressione della coppia elettromagnetica di un attuatore con avvolgimenti su statore e rotore
- 18) Presentare e discutere il modello dinamico di un attuatore ad avvolgimenti multipli

**Indice delle figure**

Fig. 2.1 - Sistema elettromeccanico elementare ..... 31

Fig. 2.2 - Caratteristica magnetica del sistema elettromeccanico elementare..... 32

Fig. 2.3 - Spostamento del punto di lavoro sulla caratteristica magnetica..... 33

Fig. 2.4 - Bilancio di energia di un attuatore elettromeccanico..... 33

Fig. 2.5 - Definizione dell'energia e della coenergia magnetica nel piano flusso-corrente..... 34

Fig. 2.6 - Variazione del punto di lavoro sulle caratteristiche flusso-corrente ..... 35

Fig. 2.7 - Spostamento a flusso costante ..... 36

Fig. 2.8 - Spostamento a corrente costante ..... 36

Fig. 2.9 - Variazione dell'energia magnetica..... 37

Fig. 2.10 - Variazione della coenergia magnetica ..... 37

Fig. 2.11 - Energia e coenergia magnetica in sistemi lineari..... 38

Fig. 2.12 - Caratteristiche magnetiche dell'attuatore a riluttanza (supposto lineare)..... 39

Fig. 2.13 - Caratteristica coppia-posizione dell'attuatore a riluttanza ..... 40

Fig. 2.14 - Variazione con la posizione dell'induttanza nell'attuatore a riluttanza..... 41

Fig. 2.15 - Attuatore elettromeccanico con avvolgimenti su statore e rotore ..... 42

**INDICE**

**2 Principi di conversione elettromeccanica dell'energia..... 31**

**2.1 Modellistica di un attuatore elettromeccanico ..... 31**

2.1.1 Equazioni elettriche ..... 31

2.1.2 Bilancio di energia..... 33

2.1.3 Energia magnetica immagazzinata. Coenergia ..... 34

2.1.4 Espressione della coppia elettromagnetica ..... 35

|                                   |   |           |
|-----------------------------------|---|-----------|
| 2.1.4.1                           | Spostamento a flusso costante.....                                | 35        |
| 2.1.4.2                           | Spostamento a corrente costante.....                              | 36        |
| 2.1.5                             | Sistemi lineari.....  | 38        |
| 2.1.6                             | Calcolo della coppia per l'attuatore elementare a riluttanza..... | 39        |
| 2.1.7                             | Modello dinamico dell'attuatore elementare a riluttanza.....      | 41        |
| <b>2.2</b>                        | <b>Attuatori con avvolgimenti multipli.....</b>                   | <b>42</b> |
| 2.2.1                             | Equazioni elettriche.....   | 43        |
| 2.2.2                             | Energia magnetica.....  | 44        |
| 2.2.3                             | Espressione della coppia elettromagnetica.....                    | 45        |
| 2.2.4                             | Modello dinamico.....   | 46        |
| <b>Test di apprendimento.....</b> |   | <b>46</b> |
| <b>Indice delle figure.....</b>   |   | <b>47</b> |
| <b>INDICE.....</b>                |   | <b>47</b> |