

Azionamenti con motore in corrente continua

2.1 - Struttura dell'azionamento. - La struttura di principio di un azionamento con motore a corrente continua ad eccitazione indipendente, per il quale si preveda sia il controllo di armatura che quello di campo, è illustrato in Fig. 2.1.1. Il circuito di armatura e quello di eccitazione sono alimentati da due convertitori statici che forniscono le desiderate tensioni di armatura u_a e di eccitazione u_e proporzionali ai corrispondenti riferimenti $u_{a,rif}$ e $u_{e,rif}$. Questi ultimi sono prodotti dal controllo dell'azionamento che elabora i segnali di riferimento della velocità ω_{rif} (o, quando è il caso, quello della coppia o della posizione) e quelli di reazione, per esempio, con riferimento alla figura, i segnali di velocità e delle correnti di armatura e di eccitazione, ottenuti dai rispettivi trasduttori. Quando non è prevista la regolazione di campo, l'eccitazione è alimentata a tensione costante.

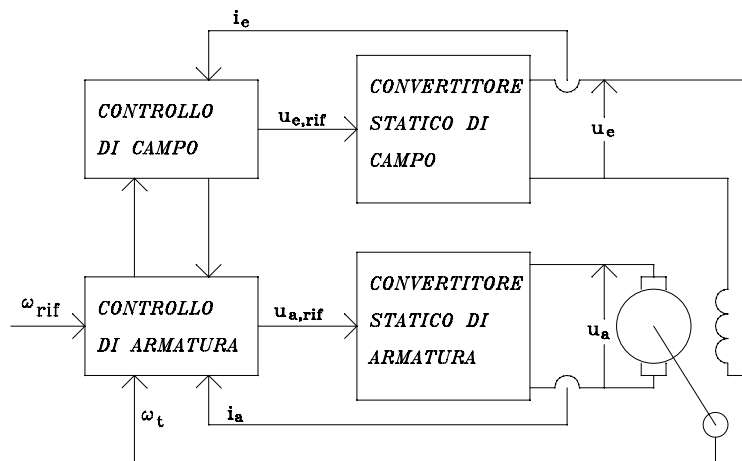


Fig. 2.1.1 - Struttura generale di un azionamento con motore c.c.

Numerose sono le possibili configurazioni dei convertitori statici e dei sistemi di controllo. Esse saranno esaminate in dettaglio nel seguito di questo capitolo.

Per quanto riguarda i convertitori statici, si fa qui l'assunzione che essi possano erogare tensioni e correnti sia negative che positive e che la tensione di uscita segua linearmente quella di ingresso con una dinamica definita da una funzione di trasferimento del primo ordine. Per i convertitori si assumerà pertanto la relazione in s

$$CS(s) = \frac{U(s)}{U_{rif}(s)} = \frac{K_c}{1 + s\tau_c} \quad (2.1.1)$$

dove K_c è il guadagno (costante) del convertitore e τ_c è la costante di tempo che definisce il ritardo con cui la tensione di uscita risponde ad ogni variazione del suo riferimento.

Data una funzione $f(t)$, la sua espressione quando la si ritarda di un tempo T_c diventa $f(t-T_c)$. Nel dominio di Laplace questo equivale a moltiplicare la trasformata di $f(t)$, $F(s)$, per e^{-sT_c} . Per piccoli valori di T_c si può poi approssimare in serie di McLaurin la funzione esponenziale, ottenendo la relazione:

$$e^{-s\tau_c} = \frac{1}{e^{s\tau_c}} \cong \frac{1}{1+s\tau_c}$$

In genere il valore di τ_c va dalle frazioni di millisecondo a qualche millisecondo e perciò è solitamente inferiore alla costante di tempo di armatura che, a sua volta, è inferiore a quella meccanica e a quella del circuito di eccitazione.

2.2 - Azionamento con il solo anello di velocità

Si considerano in questo e nei prossimi paragrafi i principali schemi di controllo per azionamenti impieganti motori a corrente continua comandati sull'armatura e/o sull'eccitazione da adeguati convertitori statici di potenza. Per soddisfare alle impegnative esigenze che si incontrano nelle moderne applicazioni degli azionamenti elettrici, sia per quanto riguarda la precisione a regime sia per la prontezza dell'intero sistema, il tipo di controllo impiegato è quasi universalmente quello a catena chiusa e tale sarà quello preso in esame in questi appunti con riferimento ad un controllo di velocità.

La configurazione più semplice di azionamento con controllo di velocità, è quella di Fig. 2.2.1. In esso un motore con eccitazione costante (in pratica con eccitazione connessa, per esempio, ad un raddrizzatore a diodi non controllati, v. cap. 3) è alimentato tramite un convertitore statico con una tensione di armatura il cui valore di riferimento è prodotto dal regolatore di velocità che elabora l'errore e_ω fra il riferimento di velocità ω_{rif} e il segnale di reazione della stessa ω_t .

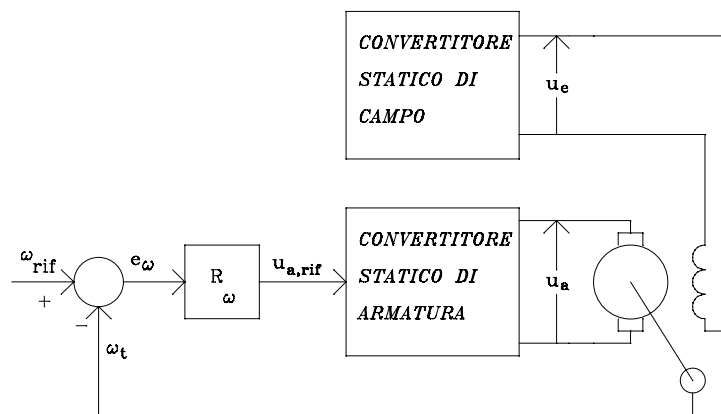


Fig. 2.2.1 - Azionamento con motore c.c. con solo anello di velocità

Al sistema di Fig. 2.2.1 corrisponde lo schema a blocchi di Fig. 2.2.2, nel quale sono messi in evidenza i blocchi che rappresentano il convertitore (Fig. (2.2.1)), il motore e il trasduttore di velocità, assunto quest'ultimo descritto da una semplice guadagno $K_{t\omega}$.

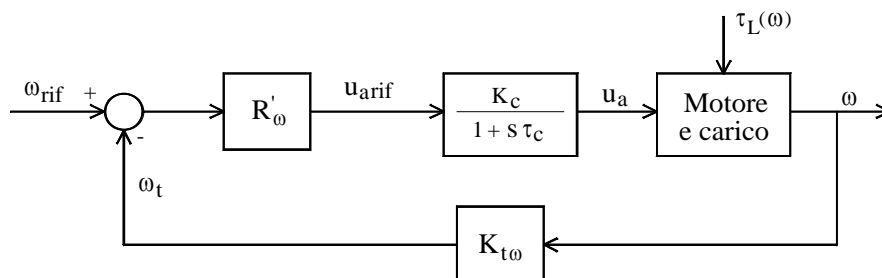


Fig.2.2.2 - Schema a blocchi dell'azionamento con solo anello di velocità

Per un più agevole studio della dinamica dell'azionamento e una più semplice esposizione dei criteri di progetto dei regolatori, allo schema di Fig.2.2.2 si applicano le trasformazioni che lo portano a quello di Fig.2.2.3:

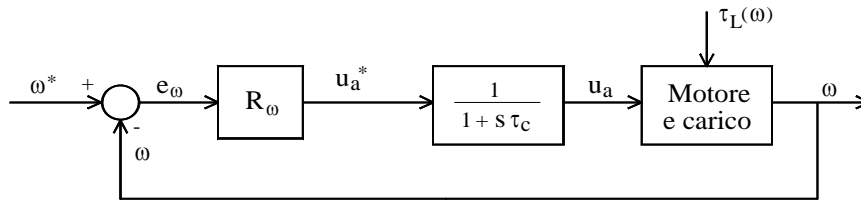


Fig.2.2.3 - Schema a blocchi con costanti di trasduzione dei sensori unitarie

In Fig.2.2.3 si sono posti:

$$\begin{aligned} R_\omega &= K_c K_{t\omega} R_\omega' \\ \omega^* &= \omega_{rif} / K_{t\omega} \\ u_a^* &= u_{arif} K_c \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Lo schema di Fig.2.2.3 corrisponde a supporre che il trasduttore di velocità e il convertitore d'armatura abbiano guadagni statici unitari. Un possibile vantaggio sta nel fatto che così facendo i riferimenti, ora indicati con l'asterisco, sono espressi nella stessa scala e unità di misura delle grandezze cui si riferiscono e i segnali di reazione sono rappresentati dalle stesse grandezze controllate a catena chiusa.

Nel caso si voglia tenere in conto la dinamica del trasduttore di velocità, che come tutti i trasduttori, unitamente al loro sistema di condizionamento del segnale di uscita, avrà una caratteristica passa basso, lo schema di Fig.2.2.3 dovrà essere completato inserendo nel canale di reazione la parte dinamica (a guadagno statico unitario) del sistema di trasduzione.

Assumendo che l'alimentazione dell'eccitazione del motore a tensione costante corrisponda ad un funzionamento a flusso costante e che il carico meccanico sia descritto dalla relazione lineare (I.8.2), lo schema di Fig.2.2.3 può essere trasformato nel dominio di Laplace in quello di Fig.2.2.4, ove, separatamente, sono messe in evidenza le funzioni di trasferimento fra tensione di armatura e velocità e fra coppia di carico e velocità (cfr. par. 1.5).

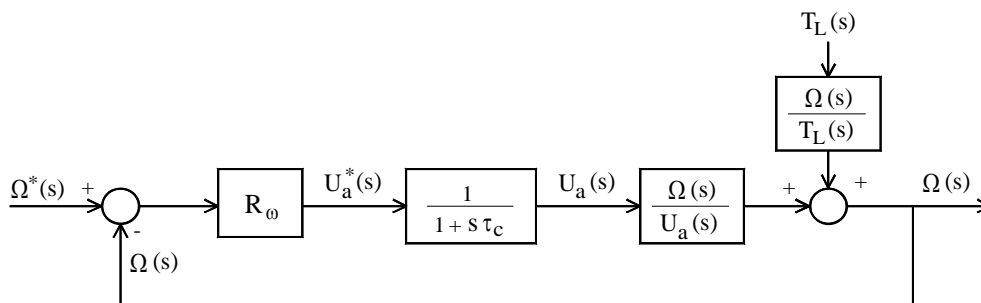


Fig. 2.2.4 - Schema a blocchi nel dominio di Laplace

Le espressioni esplicite delle due funzioni di trasferimento sono già state ricavate nel par.5; in particolare si farà riferimento alle (1.5.12)¹ e (1.5.19).

¹ C'è da sottolineare che la (1.5.12) è stata ricavata nelle ipotesi di avere $\tau_a \ll \tau_m$ e $\tau_{m1} \ll \tau_m$; tali ipotesi sono praticamente sempre verificate se i parametri di inerzia ed attrito viscoso si riferiscono al solo motore; può non essere così per particolari carichi, ad esempio quelli caratterizzati da grande attrito viscoso come i ventilatori.

In molte applicazioni pratiche non critiche si richiede semplicità circuitale del controllore di velocità, per mantenere bassi costi e ridotti tempi di taratura dell'azionamento. Verranno di seguito esaminati i progetti di due regolatori, di tipo proporzionale ("P") e proporzionale-integrale ("PI"), che uniscono semplicità realizzativa a buone prestazioni dinamiche, sufficienti a coprire gran parte delle applicazioni.

2.2.1 - Progetto con regolatore proporzionale (P) - Il regolatore P è il più semplice dei regolatori esistenti; esso viene impiegato in questo caso per produrre un riferimento di tensione d'armatura u_a^* proporzionale all'errore tra la velocità desiderata ω^* e la velocità effettiva del motore ω (Fig.2.2.4). La sua funzione di trasferimento è dunque:

$$R_\omega(s) = K_{p\omega} \quad (2.2.1.1)$$

La funzione di trasferimento ad anello chiuso per l'azionamento di Fig.2.2.4, ricordando che ci si è ricondotti ad avere $H(j\omega)=1$ ed utilizzando l'espressione (1.5.12) per $\Omega(s)/U_a(s)$, risulta la seguente:

$$GH(j\omega) = \frac{K_{p\omega}/K_e\Phi}{(1+j\omega\tau_c)\left(1-\frac{j\omega}{p_1}\right)\left(1-\frac{j\omega}{p_2}\right)} \quad (2.2.1.2)$$

L'unica variabile di progetto è il guadagno $K_{p\omega}$ del regolatore P; un criterio usualmente adottato consiste nel fissare come specifica un certo margine di fase m_ϕ di cui per praticità si richiama la definizione dalla Teoria dei Controlli Automatici:

$$m_\phi = \pi + \angle GH(j\omega_{attr}) \quad (2.2.1.3)$$

dove ω_{attr} rappresenta la pulsazione di attraversamento, per la quale il modulo della funzione GH diventa unitario:

$$|GH(j\omega_{attr})| = 1 \quad (2.2.1.4)$$

Nel caso in esame è dunque sufficiente ricavare ω_{attr} dalla (2.2.1.3) imponendo un margine di fase opportuno (precauzionalmente non inferiore a 40°) e ricavare infine il guadagno $K_{p\omega}$ sostituendo il valore di ω_{attr} trovato nella (2.2.1.2) ed imponendo che l'espressione soddisfi la condizione (2.2.1.4).

E' facile verificare che questo criterio porta a dover risolvere equazioni trascendenti, per le quali è conveniente ricorrere a mezzi di calcolo automatico. In taluni casi, comunque, i valori numerici che entrano in gioco consentono di semplificare l'espressione (2.2.1.2); un caso non raro è che i tra i poli della funzione ve ne sia uno a frequenza molto elevata rispetto agli altri due, così da poter essere trascurato, in prima approssimazione, nei calcoli di progetto del regolatore.

L'azionamento con regolatore P, non presentando una funzione di trasferimento con poli nell'origine, è un sistema di tipo zero e presenta pertanto errore non nullo a regime. Di questo è facile rendersi conto se si osserva che è proprio un errore di velocità che permette la generazione dell'opportuno riferimento di tensione d'armatura. Se, per assurdo, si annullasse l'errore di velocità, si annullerebbe anche la tensione applicata al motore e l'azionamento cesserebbe di funzionare.

Per le tipologie di carico che non soddisfano le ipotesi che hanno portato alla (1.5.12) occorre naturalmente utilizzare l'espressione più generale (1.5.3).

Un criterio alternativo per il calcolo del guadagno $K_{p\omega}$ può dunque consistere nell'imporre l'errore di velocità a regime E_ω , quando il riferimento di velocità ω^* è imposto pari alla velocità nominale ω_N ed in condizioni di carico nominali ($I_a=I_{aN}$). Dalla Fig.2.2.3, ricordando la (2.2.1.1) e la (1.3.1) è immediato ricavare la seguente espressione:

$$K_{p\omega} = \frac{R_a I_{aN} + K_e \Phi \Omega_N - K_e \Phi E_\omega}{E_\omega} \quad (2.2.1.5)$$

salvo poi assicurarsi che rimanga un margine di fase sufficiente a garantire la stabilità dell'azionamento. L'errore, infatti, cala al crescere del guadagno del regolatore P, ma questa azione conduce verso una zona di instabilità, com'è facile rilevare tracciando ad esempio il diagramma di Bode per $GH(j\omega)$.

Dalla (2.2.1.5) si può infine ricavare l'espressione che dà l'errore relativo di velocità in funzione del riferimento impostato:

$$\frac{E_\omega}{\Omega^*} = \frac{K_e \Phi}{K_{p\omega} + K_e \Phi} + \frac{R I_a}{(K_{p\omega} + K_e \Phi) \Omega^*} \quad (2.2.1.6)$$

Si può notare che si tratta, al variare della corrente di armatura, di una famiglia di iperboli, e che il minimo errore percentuale di velocità si ha a vuoto, alla massima velocità del motore.

2.2.2 - Progetto con regolatore proporzionale - integrale (PI) - Com'è evidente, in molti casi non esiste un valore del guadagno proporzionale che permetta di soddisfare contemporaneamente a requisiti di stabilità e di prontezza della risposta di velocità. Occorre quindi ricorrere ad un regolatore più complesso, che realizzi ad esempio una azione proporzionale-integratrice sull'errore di velocità, assicurando errore nullo a regime. La funzione di trasferimento è in questo caso la seguente:

$$R_\omega(s) = K_{p\omega} \frac{1 + s\tau_\omega}{s\tau_\omega} \quad (2.2.2.1)$$

La funzione di trasferimento ad anello chiuso per l'azionamento di Fig.2.2.4, tenendo conto della (2.2.2.1) risulta adesso:

$$GH(j\omega) = \frac{K_{p\omega}(1 + j\omega\tau_\omega)/K_e \Phi}{j\omega\tau_\omega(1 + j\omega\tau_c) \left(1 - \frac{j\omega}{p_1}\right) \left(1 - \frac{j\omega}{p_2}\right)} \quad (2.2.2.2)$$

Una tecnica solitamente seguita per il progetto del regolatore PI (ovvero per la determinazione delle due costanti che lo caratterizzano, $K_{p\omega}$ e τ_ω consiste nel far cancellare dallo zero introdotto dal regolatore il polo dominante; supponendo che questo sia p_2 si pone dunque:

$$\tau_\omega = -\frac{1}{p_2} \quad (2.2.2.3)$$

e la funzione di trasferimento ad anello chiuso si semplifica divenendo:

$$GH(j\omega) = \frac{K_{p\omega}/K_e\Phi}{j\omega\tau_\omega(1+j\omega\tau_c)\left(1-\frac{j\omega}{p_1}\right)} \quad (2.2.2.4)$$

Il diagramma di Bode è riportato in Fig.2.2.2.1; è evidente che ora la scelta del guadagno statico del regolatore serve a fissare un margine di fase sufficiente a garantire un funzionamento stabile, che anche in questo caso non è solitamente inferiore a 40°. La procedura per il calcolo di $K_{p\omega}$ è poi analoga a quella del solo regolatore proporzionale (par.2.2.1), ove alla (2.2.1.2) si sostituisca la (2.2.2.4).

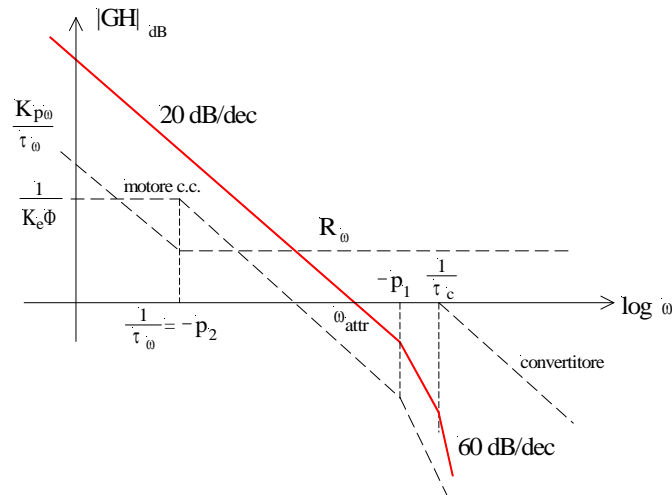


Fig.2.2.2.1 - Diagramma di Bode per il controllo di velocità con regolatore PI

La Fig.2.2.2.1 riporta anche, a tratteggio, le caratteristiche di Bode relative ai singoli blocchi presenti nello schema di controllo. In particolare si può notare come l'introduzione del regolatore PI conduca ad una curva GH traslata a destra rispetto alla caratteristica $\Omega(s)/U_a(s)$ propria del motore, con conseguente incremento della pulsazione di attraversamento ω_{attr} . Per un ragionamento qualitativo, qual'è da intendersi il presente, ω_{attr} può considerarsi legata direttamente alla banda passante dell'anello di velocità e dunque rimane verificato che il regolatore PI permetta di migliorare la dinamica del sistema mantenendo nel contempo errore nullo a regime, per la presenza di un polo nell'origine della funzione $GH(s)$.

2.2.3 - Limitazione della corrente di armatura - Durante i transitori, a fronte di errori di velocità cospicui, l'uscita dei regolatori P o PI può richiedere tensioni d'armatura molto grandi anche a piccole velocità. Considerando ad esempio il caso di regolatore P, supponendo per semplicità un carico di tipo puramente inerziale ($B=0$) si può far riferimento alla Fig.2.2.3.1:

Tralasciando per il momento il circuito di limitazione della corrente, tratteggiato in Fig.2.2.3.1, e supponendo che il regolatore R_ω sia caratterizzato da un guadagno $K_{p\omega}$, è facile rendersi conto che il legame tra riferimento di velocità Ω^* e la corrente di armatura I_a , espresso secondo le trasformate di Laplace vale:

$$\frac{I_a(s)}{\Omega^*(s)} = \frac{sK_{p\omega}/L_a}{s^2 + s\frac{R_a}{L_a} + \frac{K_e\Phi}{L_aJ}\left(K_{p\omega} + K_e\Phi\right)} = \frac{sK_{p\omega}/L_a}{s^2 + 2\xi\omega_0s + \omega_0^2} \quad (2.2.3.1)$$

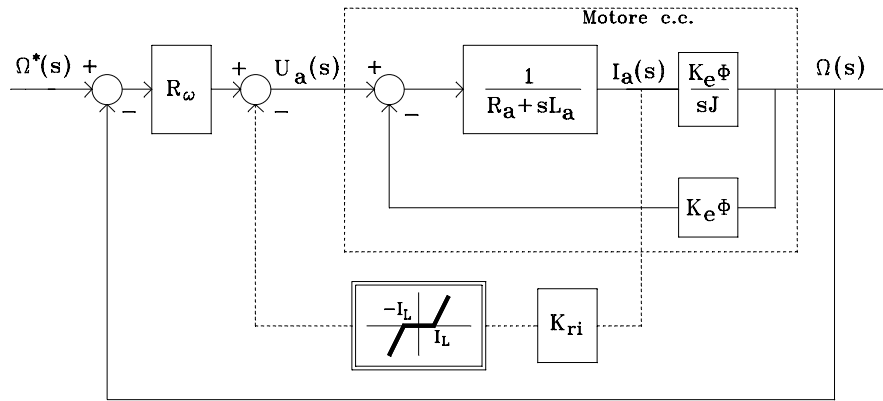


Fig.2.2.3.1 - Limitazione della corrente di armatura

dove in particolare lo smorzamento ξ vale:

$$\xi = \frac{R_a}{2} \sqrt{\frac{J}{L_a K_e \Phi (K_{p\omega} + K_e \Phi)}} \quad (2.2.3.2)$$

E' evidente che per valori abbastanza alti di $K_{p\omega}$ lo smorzamento è piccolo e dunque gradini di riferimento di velocità producono sovraoscillazioni nella corrente che possono eccedere i limiti del convertitore o del motore.

Un rimedio semplice è rappresentato, a tratteggio, in Fig.2.2.3.1; la corrente di armatura viene trasdotta, eventualmente moltiplicata per un coefficiente K_{ri} (anche inferiore all'unità) ed infine entra in un blocco non lineare di limitazione. Fino a che la corrente rimane, in valore assoluto, all'interno del limite prefissato I_L , l'uscita del limitatore è nulla, ed è quindi come se la retroazione di corrente non esistesse. All'opposto, quando la corrente eccede il limite, il blocco limitatore propone il segnale retroazionato moltiplicato per un guadagno elevatissimo, di fatto facendo tendere a zero il guadagno di anello e forzando così una riduzione della corrente.

Come si intuisce, qualche problema di stabilità può insorgere dato che l'azionamento in limitazione di corrente funziona a struttura variabile, commutando tra due configurazioni di cui una dotata di altissimo guadagno GH. Questo inconveniente spinge a ricercare soluzioni più sofisticate ed efficaci, come quelle che contemplan la realizzazione di veri anelli di regolazione della corrente di armatura. Le strutture degli azionamenti che ne derivano saranno estesamente trattati nel paragrafo successivo.

2.3 - Azionamenti con anelli di velocità e di corrente

Nel par.2.2 si sono viste diverse soluzioni per il controllo a catena chiusa della velocità. Si è osservato, in conclusione del paragrafo, come durante i transitori della velocità la corrente possa eccedere i valori nominali del convertitore o del motore, inconveniente che va assolutamente evitato per preservare l'integrità dell'azionamento e garantirne un buon funzionamento prolungato nel tempo. Per azionamenti di maggior pregio, si implementa, oltre ad integrazione dell'anello di velocità, una regolazione di corrente. I vantaggi di questa soluzione sono principalmente due:

- si migliora la dinamica della corrente, dato che con un opportuno progetto del regolatore di corrente si può compensare il ritardo tra il comando (tensione di armatura) e la grandezza regolata (corrente di armatura, appunto) introdotto dalla costante di tempo elettrica del motore;

- si dispone di un efficace strumento di limitazione della corrente, che si ottiene semplicemente limitandone il riferimento nell'anello di regolazione.

Saranno ora prese in esame due diverse topologie realizzative, evidenziando di ciascuna le caratteristiche salienti.

2.3.1 - Struttura con regolatori in cascata - Essa consiste nell'inserire all'interno dell'anello di regolazione della velocità un anello di regolazione della corrente, così come evidenziato in Fig.2.3.1.1.

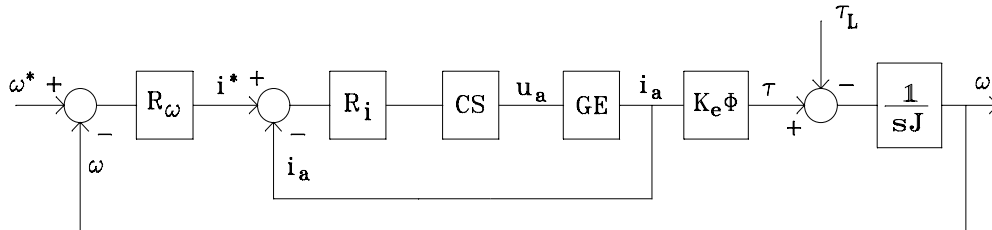


Fig.2.3.1.1 - Regolazione di velocità e corrente con regolatori in cascata

Si noti che in Fig.2.3.1.1 tutte le costanti di trasduzione sono state riportate all'interno dei regolatori R_{ω} ed R_i , e quindi la trattazione seguente possa beneficiare della semplicità relativa agli schemi a retroazione unitaria (cfr. Introduzione-I).

Nel seguito si ipotizza che il motore operi a flusso di eccitazione costante; questo rende lineari le equazioni dinamiche del motore e si può ricavare un modello matematico e a blocchi nel dominio di Laplace. Si focalizzerà dapprima l'attenzione sul progetto dell'anello interno di regolazione della corrente, nel quale si suppone che il regolatore R_i sia di tipo PI, caratterizzato da un guadagno K_{pi} e da una costante di tempo τ_{ri} :

$$R_i(s) = K_{pi} \frac{1 + s\tau_{ri}}{s\tau_{ri}} \quad (2.3.1.1)$$

Le espressioni in s del convertitore statico $CS(s)$ e della funzione di trasferimento tra tensione e corrente di armatura $GE(s)$ sono già state ricavate nei paragrafi precedenti, e vengono qui riportate per praticità, supponendo $B=0$:

$$CS(s) = \frac{U(s)}{U_{rif}(s)} = \frac{K_c}{1 + s\tau_c} \quad GE(s) = \frac{sJ/K_e\Phi}{K_e\Phi \left(1 - \frac{s}{p_1}\right) \left(1 - \frac{s}{p_2}\right)} \quad (2.3.1.2)$$

Se si pone $\tau_{ri} = -1/p_2$, lo zero del regolatore cancella il polo dominante della $GE(s)$ e la funzione ad anello chiuso $GH(s)$ risulta la seguente:

$$GH(s) = - \frac{K_{pi}K_c/L_a p_1}{\left(1 - \frac{s}{p_1}\right) (1 + s\tau_c)} \quad (2.3.1.3)$$

La scelta del guadagno K_{pi} può essere fatta, come di consueto, in base allo studio del diagramma di Bode di $GH(s)$, imponendo un margine di fase di almeno 60° .

Una approssimazione che spesso viene utilizzata nel progetto di regolatori in cascata, sfruttando l'ipotesi di retroazione unitaria, consiste nell'esprimere, data la funzione ad anello chiuso $GH(s)$, la funzione di trasferimento come

$$W_i(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} \approx \begin{cases} 1 & \text{se } s < j\omega_{oi} \\ G(s) & \text{se } s > j\omega_{oi} \end{cases}$$

dove $\omega_{oi}=1/\tau_{oi}$ è la pulsazione di attraversamento dell'asse delle ascisse nel diagramma di Bode di $GH(s)$. Applicando questa approssimazione al caso in esame consente all'anello esterno (di regolazione della velocità) di vedere quello interno di corrente come un sistema avente funzione di trasferimento

$$W_i(s) = \frac{1}{(1+s\tau_{oi})(1+s\tau_c)} \quad (2.3.1.4)$$

La (2.3.1.4) è una funzione del secondo ordine. Paragonandola alla funzione scritta in forma canonica

$$W_i(s) = \frac{\omega_o^2}{s^2 + 2\xi s\omega_o + \omega_o^2}$$

si ricavano facilmente le espressioni per lo smorzamento ξ e la pulsazione naturale ω_o :

$$\xi = \frac{\tau_{oi} + \tau_c}{2} \frac{1}{\sqrt{\tau_{oi}\tau_c}} ; \omega_o = \frac{1}{\sqrt{\tau_{oi}\tau_c}}$$

Queste espressioni permettono un calcolo agevole della banda passante (approssimata) dell'anello di corrente:

$$BP = \frac{\omega_o}{2\pi} \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{2 - 4\xi^2 + 4\xi^4}}$$

Un diverso approccio al progetto può essere quello di fissare la desiderata banda passante BP dell'anello di corrente, ricavando la pulsazione di attraversamento τ_{oi} ; questa può essere usata per determinare il guadagno K_{pi} del regolatore di corrente. E' opportuno osservare che in ogni caso va poi fatta una verifica sul margine di fase, per garantire la stabilità dell'anello di regolazione anche a fronte di sempre possibili variazioni parametriche.

La limitazione della corrente si ottiene semplicemente introducendo un blocco limitatore a $\pm I_L$ all'uscita del regolatore di velocità; la corrente verrà in tal modo limitata con una veloce dinamica (dettata dalla banda passante dell'anello di corrente) e con sovraoscillazioni contenute e comunque predicibili dallo studio della (2.3.1.4).

Si può passare ora al progetto dell'anello per la regolazione della velocità. Lo schema a blocchi a cui far riferimento è riportato in Fig.2.3.1.2. Anche in questo caso una scelta largamente condivisa per il regolatore di velocità è un PI, caratterizzato da un guadagno $K_{r\omega}$ e da una costante di tempo $\tau_{r\omega}$:

$$R_\omega(s) = K_{p\omega} \frac{1+s\tau_{r\omega}}{s\tau_{r\omega}} \quad (2.3.1.5)$$

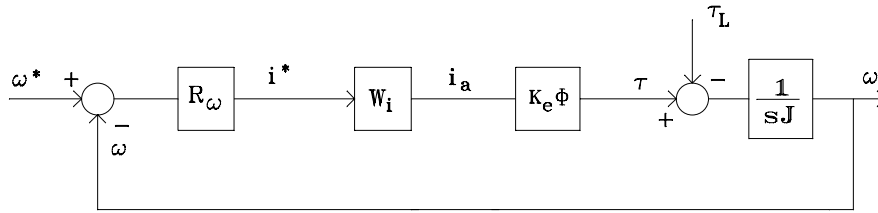


Fig.2.3.1.2 - Anello di regolazione della velocità

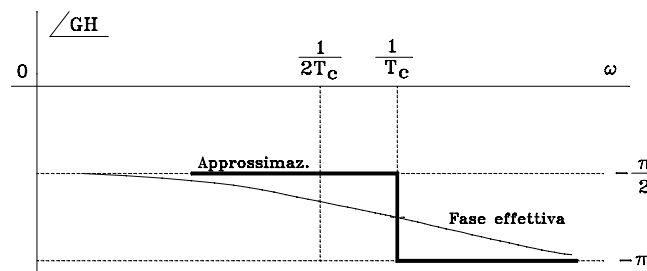
La funzione GH(s) ad anello chiuso vale in questo caso:

$$GH(s) = \frac{K_{p\omega} K_e \phi}{\tau_{r\omega} J} \frac{(1 + s \tau_{r\omega})}{s^2 (1 + s \tau_{oi}) (1 + s \tau_c)} \quad (2.3.1.6)$$

Per la presenza del polo doppio nell'origine non è in questo caso possibile scegliere $\tau_{r\omega}$ in modo da compensare con lo zero del regolatore uno dei poli non nulli del denominatore; si può allora seguire una differente procedura, di seguito delineata:

- si impone una pulsazione di attraversamento $\omega_{0\omega} = 1/\tau_{0\omega}$ pari a circa la metà della pulsazione corrispondente al passaggio della pendenza della caratteristica GH(j ω) da 20 a 40 dB/decade nel diagramma di Bode;

Nell'ipotesi di considerare abbastanza lontani gli altri poli, si può dimostrare, con qualche approssimazione, che questo porta ad avere un margine di fase m_ϕ di circa 64°. Si può far riferimento alla figura seguente :



Se ci fossero solo il polo nell'origine e il polo in $1/\tau_o$, l'evoluzione della fase attorno a $1/\tau_o$ sarebbe influenzata solo da tale polo; per una pulsazione pari alla metà di quella del polo varrebbe

$$\arg\left(\frac{1}{1 + j\omega\tau_o}\right)\Bigg|_{\omega=1/2\tau_o} = -\text{atg}\left(\frac{1}{2}\right)$$

ed il margine di fase sarebbe dunque:

$$m_\phi = \pi + \left[-\frac{\pi}{2} - \text{atg}\left(\frac{1}{2}\right)\right] \approx 64^\circ$$

Nel caso del progetto in esame non ci sono i presupposti per questa approssimazione, almeno per l'anello di velocità; si può comunque mantenere la scelta fatta per la pulsazione di attraversamento, imponendo poi un margine di fase che andrà soddisfatto scegliendo opportunamente lo zero del regolatore di velocità.

- si impone una condizione sul margine di fase, per esempio che non sia inferiore a 40° ; dato che la pulsazione di attraversamento è stata fissata al passo precedente, questa condizione conduce al calcolo diretto della costante di tempo $\tau_{r\omega}$. Si ha infatti:

$$\begin{aligned} m_\varphi &= \pi + \arg(\text{GH}(j\omega_{\text{attr}})) = \pi + \text{atg}(\omega_{\text{attr}}\tau_{r\omega}) - [\text{atg}(\omega_{\text{attr}}\tau_{oi}) + \text{atg}(\omega_{\text{attr}}\tau_c) + \pi] = \\ &= \text{atg}(\tau_{r\omega}/\tau_{o\omega}) - \text{atg}(\tau_{oi}/\tau_{o\omega}) - \text{atg}(\tau_c/\tau_{o\omega}) \end{aligned} \quad (2.3.1.7)$$

e quindi:

$$\text{atg}(\tau_{r\omega}/\tau_{o\omega}) = m_\varphi + \text{atg}(\tau_{oi}/\tau_{o\omega}) + \text{atg}(\tau_c/\tau_{o\omega}) \quad (2.3.1.8)$$

da cui è immediato ricavare il valore di $\tau_{r\omega}$.

- conoscendo la costante di tempo $\tau_{r\omega}$, si può ora determinare in modo univoco il guadagno $K_{r\omega}$ del regolatore di velocità, imponendo che il modulo di GH calcolato alla pulsazione di attraversamento stabilita al primo passo della procedura sia unitario:

$$|\text{GH}(j\omega_{\text{attr}})| = \frac{K_{p\omega} K_e \Phi}{J\tau_{r\omega}\omega_{\text{attr}}^2} \sqrt{\frac{1 + \omega_{\text{attr}}^2\tau_{r\omega}^2}{(1 + \omega_{\text{attr}}^2\tau_{oi}^2)(1 + \omega_{\text{attr}}^2\tau_c^2)}} = 1 \quad (2.3.1.9)$$

Il progetto può dunque considerarsi concluso; rimangono da svolgere alcune osservazioni di carattere pratico, che saranno riportate a margine degli esercizi su questo capitolo, al par.2.6.

Durante l'analisi degli schemi di controllo della velocità si è sempre assimilata la coppia di carico T_L ad un disturbo, considerato nullo durante il progetto dei regolatori. A progetto ultimato, è naturalmente possibile pensare di introdurre una coppia di carico, analizzandone l'influenza sulla velocità, in termini di trasformata di Laplace $\Omega(s)/T_L(s)$ (Fig.2.2.4). Dallo schema di Fig.2.3.1.2, annullando il riferimento di velocità, è immediato ricavare la funzione di trasferimento cercata:

$$\frac{\Omega(s)}{T_L(s)} = - \frac{\frac{1}{sJ}}{1 + \frac{1}{sJ} R_\omega(s) W_i(s) K_e \Phi} \quad (2.3.1.10)$$

dalla quale, sostituendo le espressioni esplicite, ed in particolare quella semplificata per W_i , si giunge ad una funzione razionale con due zeri e tre poli, di difficile interpretazione intuitiva. Se si fa invece l'ipotesi semplificativa che la dinamica dell'anello di corrente sia molto più rapida di quella dell'anello di velocità (e questo è normale negli azionamenti con convertitori molto veloci, come i chopper) si può pensare che la funzione di trasferimento W_i si riduca ad un semplice guadagno unitario; in tal caso ottiene:

$$\frac{\Omega(s)}{T_L(s)} = - \frac{s/J}{s^2 + \frac{K_{p\omega} K_e \phi}{J} s + \frac{K_{p\omega} K_e \phi}{J\tau_{r\omega}}} \quad (2.3.1.11)$$

La (2.3.1.11) è una funzione del secondo ordine; essa può essere paragonata alla funzione scritta in forma canonica, premoltiplicandola per il fattore $\tau_{r\omega}/K_{p\omega}K_e\Phi$; dal confronto si ricavano facilmente le espressioni per lo smorzamento ξ e la pulsazione naturale ω_0 :

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K_{p\omega} \tau_{r\omega} K_e \Phi}{J}} ; \omega_0 = \sqrt{\frac{K_{p\omega} K_e \Phi}{J \tau_{r\omega}}}$$

Rimane confermato come lo smorzamento sia tanto migliore quanto più alto è il guadagno del regolatore; le espressioni ricavate permettono inoltre di caratterizzare, sia pure in modo approssimato, l'intera dinamica dell'azionamento nei confronti dei transitori di coppia di carico.

2.4 - Azionamento con controllo misto

Come già osservato nel par.1.3.3, una diversa possibilità per il controllo del motore consiste nel variare il flusso Φ prodotto dal circuito di eccitazione. Dato che tale flusso non può essere aumentato al di sopra del valore nominale (perchè, per un motore ben sfruttato dal punto di vista magnetico, il flusso nominale non è molto lontano da quello che provoca la saturazione del circuito magnetico), l'unica possibilità rimane quella di diminuire tale flusso (*deflussaggio*), per poter raggiungere velocità superiori alla velocità base Ω_b ; a tal scopo occorre introdurre un controllo combinato di armatura e di campo.

Una prima soluzione, per motori c.c. ad eccitazione indipendente, è rappresentata in Fig.2.4.1.

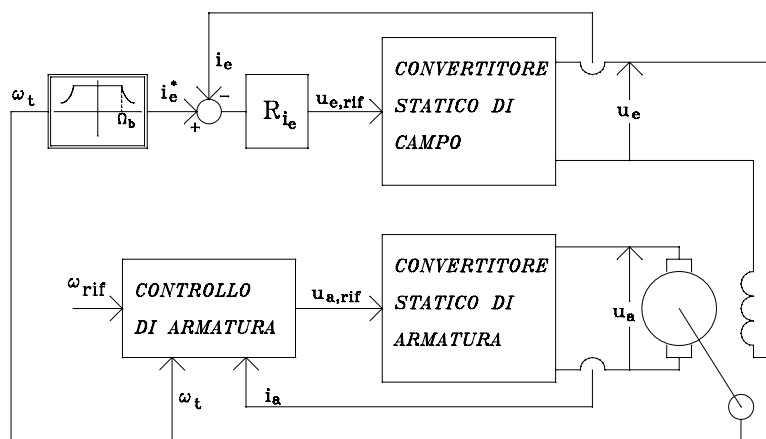


Fig. 2.4.1 - Controllo di campo con retroazione dalla velocità

Nel sistema di controllo dell'eccitazione è presente un anello di corrente; la retroazione è qui introdotta principalmente per allargare la banda passante del sistema, ovvero per rendere più pronte le variazioni di flusso che sono intrinsecamente rallentate dall'induttanza, solitamente grande, del circuito di eccitazione.

In questo schema la grandezza di riferimento acquisita dal circuito di armatura è direttamente la velocità del motore ω_t . Fino a che essa si mantiene in valore assoluto inferiore alla velocità base Ω_b , all'anello di controllo della corrente di eccitazione i_e viene proposto un riferimento i_e^* in grado di produrre il flusso d'eccitazione nominale Φ_n .

Se la riluttanza della parte in ferro del circuito magnetico dell'eccitazione rimane trascurabile rispetto a quella del traferro, si può supporre vi sia linearità tra la corrente di eccitazione ed il flusso prodotto; quando viene richiesta al motore una velocità superiore a quella base, viene dunque prodotto

un riferimento di corrente di eccitazione decrescente con legge iperbolica, per consentire di lavorare nella zona a potenza costante (cfr. par.1.3.3).

Una seconda soluzione, sempre per motori c.c. ad eccitazione indipendente, consiste nell'effettuare la retroazione direttamente della tensione di armatura, come illustrato in Fig.2.4.2:

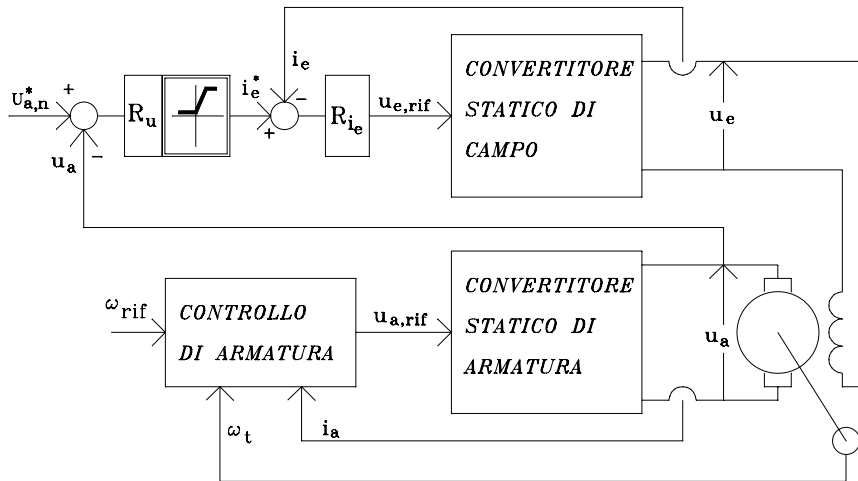


Fig. 2.4.2 - Controllo di campo con retroazione dalla tensione di armatura

Durante il funzionamento a coppia costante (cfr.par. 1.3.3) la tensione d'armatura si mantiene entro il valore nominale e l'errore all'ingresso del regolatore R_u risulta positivo. Di conseguenza, viene prodotto un riferimento di corrente i_e^* tale da produrre il flusso di eccitazione nominale.

Quando viene invece imposto un riferimento di velocità superiore a quella base, la tensione d'armatura gradualmente giunge al valore nominale, tendendo a superarlo. L'errore all'ingresso di R_u tende dunque ad annullarsi, fino a diventare negativo. Corrispondentemente, viene ridotto il riferimento di corrente di eccitazione, per comandare il deflussaggio del motore e consentire le operazioni nella zona a potenza costante.

Si noti come, per velocità inferiori a quella nominale, i due circuiti (d'armatura e di eccitazione) siano completamente separati ed agiscono in modo indipendente, non interferendo cioè l'uno con funzionamento dell'altro. Se invece si opera a velocità superiore a quella base, il circuito di controllo dell'eccitazione entra in funzione deflussando il motore; con ciò si verifica una variazione parametrica nei blocchi del sistema di controllo d'armatura, ove il flusso era considerato costante (cfr. parr. 2.2 e 2.3). Si può intuire come lo studio dinamico comprensivo di queste interazioni sia complesso e dipenda profondamente anche dalle caratteristiche costruttive del motore, che determinano il circuito magnetico e dunque la caratteristica di magnetizzazione dell'eccitazione.

Data la minor prontezza del sistema di eccitazione rispetto a quello d'armatura, si può comunque pensare, in prima approssimazione, che tali variazioni parametriche siano dei veri e propri disturbi; la stabilità dell'azionamento può in tal caso essere desunta da quella dei due sistemi separati, considerando che un disturbo non provoca instabilità, purchè si sia previsto nei controllori d'armatura un margine di fase adeguato.

- Se il convertitore statico d'armatura consente le operazioni in quattro quadranti, si noti come sia possibile restringere il controllo di campo ai soli valori positivi.
- Come si è visto, lo scopo del deflussaggio è quello di aumentare la velocità con carichi ridotti accettando lo svantaggio di avere correnti di armatura più alte a parità di coppia sviluppata; quindi non è appropriato

utilizzare il deflussaggio come controllo della velocità, almeno fino a che non siano state esplorate tutte le possibilità di utilizzo del semplice controllo di armatura.

- Se più motori sono alimentati dallo stesso bus di tensione d'armatura, come può essere nelle pratiche applicazioni nelle cartiere o nei laminatoi a ciclo continuo, piccoli aggiustamenti del flusso (inferiori al 20%) rappresentano solitamente la migliore soluzione per adeguare accuratamente le velocità dei singoli motori alle richieste del carico.

2.5 - Azionamenti con retroazione di stato

Nel caso in cui si adotti un controllo a catena aperta, la generazione del riferimento per la variabile di comando (generalmente, la tensione di armatura) avviene senza utilizzare alcuna informazione circa l'evoluzione del sistema. Al contrario, com'è noto, è possibile tenerne conto nei sistemi di controllo a catena chiusa.

Oltre a quelli, più semplici, che si basano sull'utilizzo di informazioni relative all'uscita, ve ne sono altri, più complessi, che si basano sulla *retroazione dello stato* del sistema da controllare.

Le *variabili di stato*, che non sono necessariamente rappresentazioni di grandezze con significato fisico, hanno nel loro insieme una caratteristica peculiare, detta *proprietà di separazione*: in qualunque istante, i valori assunti da tali variabili contengono nel loro complesso tutta la storia passata del sistema, necessaria per valutare l'andamento futuro sia dell'uscita che delle variabili di stato stesse, una volta noto l'andamento degli ingressi per tempi successivi all'istante considerato.

Il controllo di velocità per un motore c.c. ad eccitazione indipendente e costante può essere effettuato anche con retroazione dallo stato; come verrà esaminato tra poco, in questo caso le variabili di stato prescelte saranno legate alla velocità ed alla corrente d'armatura e quindi coincideranno con le variabili usate nei controlli a catena chiusa con retroazione dalle uscite affrontati nel par.2.3; peraltro, l'approccio generale secondo la retroazione dello stato consente di progettare direttamente i regolatori con l'allocatione dei poli del sistema globale (*pole placement*), determinando direttamente la dinamica dell'azionamento e costituisce pertanto un interessante argomento di studio.

Prima di affrontare l'analisi del controllo di velocità con allocatione dei poli è necessario descrivere il motore in corrente continua nella forma canonica di aggiornamento dello stato, che viene generalmente utilizzata nella trattazione dei problemi di controllo a retroazione dello stato.

Innanzitutto, si definisce il vettore delle variabili di stato:

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2] = [i_a \ \omega] \quad (2.5.1)$$

Le equazioni elettrica e meccanica del motore, già ricavate nel Cap.1, possono essere riscritte come segue:

$$\begin{cases} u_a = R_a x_1 + L_a \frac{dx_1}{dt} + K_e \Phi x_2 \\ K_e \Phi x_1 = B x_2 + J \frac{dx_2}{dt} \end{cases} \quad (2.5.2)$$

da cui si ricava direttamente l'espressione del modello del motore in forma canonica:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u_a(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (2.5.3)$$

dove le matrici \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} sono definite da:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -R_a/L_a & -K_e\Phi/L_a \\ K_e\Phi/J & -B/J \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/L_a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5.4)$$

$$\mathbf{C} = [0 \quad 1]$$

\mathbf{A} è detta *matrice del sistema*; nell'ambito della Teoria dei Sistemi si dimostra che i suoi *autovalori*² sono i poli del sistema stesso e quindi ne governano la dinamica. Lo scopo del progetto del regolatore è quello di sintetizzare l'ingresso u_a tramite una opportuna retroazione dello stato, che consenta di allocare a piacimento gli autovalori della nuova matrice \mathbf{A}_s , per ottenere la desiderata dinamica del sistema retroazionato³.

Ben difficilmente, però, si dispone di dirette specifiche riguardanti i poli del sistema, che non siano quelle legate alla stabilità⁴; prima di affrontare il progetto del regolatore, conviene allora soffermarsi sul legame esistente tra gli autovalori del sistema finale a catena chiusa $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ e altre grandezze più direttamente interpretabili in senso fisico, quali ad esempio lo smorzamento e la banda passante.

Tale legame risulta particolarmente semplice per sistemi del secondo ordine, la cui funzione di trasferimento è in generale espressa da

$$W(s) = \frac{\omega_o^2}{s^2 + 2\xi\omega_o s + \omega_o^2} \quad (2.5.5)$$

dove ξ è lo *smorzamento* e ω_o è la *pulsazione naturale* del sistema. Questi due parametri sono legati direttamente alle caratteristiche salienti del sistema, sia nel dominio del tempo che della frequenza.

La *risposta nel tempo ad un gradino unitario*, per un sistema del secondo ordine caratterizzato da uno smorzamento ξ e da una pulsazione naturale ω_o , è la seguente:

$$\omega_{-1}(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_o t} \sin\left(\omega_o t \sqrt{1-\xi^2} + \arccos\xi\right) \quad (2.5.6)$$

valida per $t > 0$ quando si supponga il gradino applicato all'istante $t=0$. La massima sovraelongazione percentuale $mp\%$, intesa come la differenza tra il massimo valore raggiunto dalla risposta al gradino e il valore di regime permanente, espressa relativamente a quest'ultimo valore, è pure legata allo smorzamento dalla relazione:

² Gli autovalori di una matrice \mathbf{A} sono gli zeri del polinomio caratteristico $\det [s\mathbf{I}-\mathbf{A}]$, \mathbf{I} = matrice identità.

³ La funzione di trasferimento di un sistema SISO (Single Input Single Output) caratterizzato dalle matrici \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} ovvero la sua risposta forzata alla variazione a gradino del riferimento, si può esprimere come

$$W(s) = \mathbf{C} \frac{Adj[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]}{\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]} \mathbf{B} + \mathbf{D}$$

⁴ Condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema lineare e stazionario SISO sia stabile è che i poli della sua funzione di trasferimento $W(s)$ abbiano tutti parte reale negativa.

$$mp_{\%} = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \quad (2.5.7)$$

Un altro parametro che può far parte direttamente delle specifiche a disposizione di un progettista è il *tempo di salita* tr , definito come l'intervallo fra l'istante in cui il sistema, in risposta ad un gradino di riferimento, si porta al 10% del valore di regime permanente e quello in cui la risposta raggiunge per la prima volta il 90% di tale valore. Esso vale:

$$tr = \omega_o^{-1} e^{\psi/tg(\psi)} \quad (2.5.8)$$

dove $\psi = \arccos(\xi)$.

Infine, la *banda passante* BP, espressa in Hertz e definita come l'ascissa del diagramma dei moduli che presenta una attenuazione di 3 dB rispetto al valore iniziale, è legata allo smorzamento e alla pulsazione naturale dalla relazione:

$$2\pi BP = \omega_o \sqrt{1-2\xi^2 + \sqrt{2-4\xi^2 + 4\xi^4}} \quad (2.5.9)$$

Una scelta abbastanza consueta è di porre $\xi=1/\sqrt{2}$, a cui corrisponde una sovraelongazione percentuale del 20% circa; la pulsazione naturale viene poi scelta in base alle specifiche sul tempo di salita o, equivalentemente, sulla banda passante.

Detti λ_1 e λ_2 i poli della funzione di trasferimento (2.5.5), la relazione tra questi e le grandezze ξ , ω_o che ne caratterizzano la dinamica è data dall'espressione che segue:

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_o \pm \omega_o \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (2.5.10)$$

I coefficienti del polinomio caratteristico del sistema, ovvero del polinomio a denominatore della (2.5.5) sono pure legati allo smorzamento e alla pulsazione naturale dalla

$$\begin{aligned} a_1 &= 2\xi\omega_o \\ a_2 &= \omega_o^2 \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

Per proseguire, una prima verifica va necessariamente fatta per valutare se il sistema (2.5.3) da controllare goda della proprietà di *raggiungibilità*, ovvero se qualunque stato \mathbf{x} sia raggiungibile applicando un opportuno ingresso u_a al sistema⁵.

Affinchè il sistema sia (completamente) raggiungibile è necessario che il sottospazio degli stati raggiungibili coincida con lo spazio di definizione del sistema stesso. Il sottospazio raggiungibile è, per definizione, l'immagine della matrice di raggiungibilità:

$$\mathfrak{R} = \left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \right] \quad (2.5.12)$$

L'immagine di una matrice è l'insieme dei vettori che si possono ottenere combinando linearmente i suoi vettori colonna. Se la matrice \mathfrak{R} ha determinante non nullo, essa è invertibile e i suoi vettori colonna sono linearmente indipendenti, ovvero costituiscono una base per lo spazio \mathbb{R}^n ; di conseguenza, l'immagine di \mathfrak{R} coincide con lo spazio \mathbb{R}^n di definizione del sistema, che risulta completamente raggiungibile.

Alle stesse conclusioni si può giungere ricordando che la dimensione dello spazio immagine è data dal *rank* della matrice \mathfrak{R} , che coincide con il massimo ordine del suo *minore invertibile*. Se la matrice è invertibile, essa

⁵ Nei sistemi lineari, sia continui che discreti, la raggiungibilità implica la controllabilità.

ha rango pieno (e pari alla dimensione n dello spazio in cui è definito il sistema) ed il sistema stesso è completamente raggiungibile.

Per il motore a corrente continua descritto dalle (2.5.3) e (2.5.4) la matrice di raggiungibilità vale

$$\mathfrak{R} = \begin{bmatrix} 1/L_a & -R_a/L_a^2 \\ 0 & K_e \Phi / J L_a \end{bmatrix} \quad (2.5.13)$$

Il determinante è sicuramente diverso da zero ed il sistema è dunque raggiungibile, com'era peraltro intuitivo, considerando che in via teorica (ovvero prescindendo dai vincoli fisici) qualunque velocità e corrente sono ottenibili con opportune tensioni d'armatura. Dato che il sistema è completamente raggiungibile, esiste una opportuna *matrice di retroazione* $\mathbf{L}=[L_1 \ L_2]$ che allochi ove desiderato i poli λ_1 e λ_2 per l'anello chiuso. L'ingresso u_a del sistema non retroazionato viene ottenuto tramite l'espressione

$$u_a = -\mathbf{L} \mathbf{x} + u \quad (2.5.14)$$

Sostituendo la (2.5.14) nella (2.5.3) si ottiene

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{B})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t) = \mathbf{A}_s \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (2.5.15)$$

dove si è posto evidentemente $\mathbf{A}_s = \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{B}$. Il sistema a catena chiusa, dopo la retroazione dello stato, non modifica il suo ordine. Esso risulta cioè espresso ancora da una funzione di trasferimento del secondo ordine, i cui poli possono essere allocati ovunque modificando i valori della matrice di retroazione \mathbf{L} ; in particolare, si tratta di calcolare \mathbf{L} in modo che i poli siano quelli indicati dalla (2.5.10). Vi sono diverse strade per il calcolo della matrice \mathbf{L} ; la più comoda è quella di utilizzare la *formula di Ackermann*. In generale, detti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ i poli desiderati per il sistema retroazionato di ordine n , il polinomio caratteristico si calcola come

$$P(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n \quad (2.5.16)$$

e la matrice \mathbf{L} vale

$$\mathbf{L} = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \mathfrak{R}^{-1} \mathbf{P}(\mathbf{A}) \quad (2.5.17)$$

dove $\mathbf{P}(\mathbf{A})$ è data da

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_1 \mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_{n-1} \mathbf{A} + a_n \mathbf{I}_n \quad (2.5.18)$$

e a_1, a_2, \dots, a_n sono i coefficienti del polinomio caratteristico del sistema retroazionato, calcolati tramite la (2.5.16).

Particolarizzando la (2.5.17) con la matrice di raggiungibilità (2.5.13) e calcolando $\mathbf{P}(\mathbf{A})$ tramite le (2.5.4) si trova

$$\mathbf{L} = [L_1 \ L_2] = \left[L_a (a_1 - 1/\tau_a - 1/\tau_m) \quad \frac{J L_a}{K_e \Phi} \left(a_2 - \frac{1}{\tau_a \tau_m} \right) - \frac{B L_a}{K_e \Phi} \left(a_1 - \frac{1}{\tau_m} \right) \right] \quad (2.5.19)$$

Sostituendo al posto di a_1 ed a_2 i valori (2.5.11) relativi alla desiderata dinamica del sistema si ha:

$$L = \left[L_a \left(2\xi\omega_o - 1/\tau_a - 1/\tau_m \right) \quad \frac{JL_a}{K_e\Phi} \left(\omega_o^2 - \frac{1}{\tau_a\tau_{m1}} \right) - \frac{BL_a}{K_e\Phi} \left(2\xi\omega_o - \frac{1}{\tau_m} \right) \right] \quad (2.5.20)$$

dove, si ricorda:

ξ = smorzamento desiderato per il sistema retroazionato

ω_o = pulsazione naturale desiderata per il sistema retroazionato

$\tau_a = L_a/R_a$ = costante di tempo elettrica del motore c.c.

$\tau_m = J/B$ = costante di tempo meccanica del motore c.c.

$\tau_{m1} = R_a J / (K_e \Phi)^2$ = costante di tempo elettromeccanica del motore c.c.

Dalla (2.5.16), per un sistema di ordine 2, è facile ricavare il legame tra i coefficienti del polinomio caratteristico e i poli del sistema; sostituendo tali relazioni nella (2.5.19) si ottiene:

$$L = \left[-L_a (\lambda_1 + \lambda_2 + 1/\tau_a + 1/\tau_m) \quad \frac{JL_a}{K_e\Phi} \left(\lambda_1\lambda_2 - \frac{1}{\tau_a\tau_{m1}} \right) + \frac{BL_a}{K_e\Phi} \left(\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{\tau_m} \right) \right] \quad (2.5.21)$$

Il controllo a retroazione di stato è riportato in Fig.2.5.1, che a destra mostra lo schema a blocchi utilizzando i simboli della (2.5.15), mentre a sinistra riporta l'applicazione al motore in corrente continua.

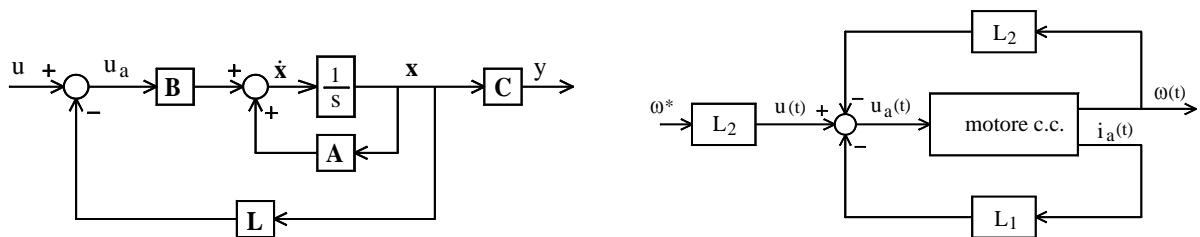


Fig.2.5.1 - Controllo di velocità a retroazione dello stato

Si può notare come la velocità ω del motore venga retroazionata all'ingresso tramite il guadagno L_2 . Affinchè sia possibile considerare l'ingresso al sistema come un puro riferimento di velocità (ovvero ω^* , esprimibile in rad/s) è necessario introdurre un guadagno pari ad L_2 anche tra l'ingresso ed il nodo di retroazione, come evidenziato in Fig.2.5.1. Naturalmente si tratta solo di una questione di comodo, che non modifica in alcun modo la dinamica del sistema.

Con semplici operazioni di algebra dei blocchi sul sistema di Fig.2.5.1 si osserva che anche con coppia di carico nulla ($B=0$) il sistema è di tipo 0, ovvero presenta errore di velocità a regime. Il controllo a retroazione di stato sopra analizzato è poi particolarmente sensibile sia all'incertezza con cui sono noti i parametri del motore e del carico, sia alle loro variazioni durante il funzionamento dell'azionamento. Per porre rimedio ai due inconvenienti citati, solitamente si aggiunge un anello di retroazione esterno sull'uscita, associandogli un regolatore integrale che rende il sistema di tipo 1, come illustrato in Fig.2.5.2.

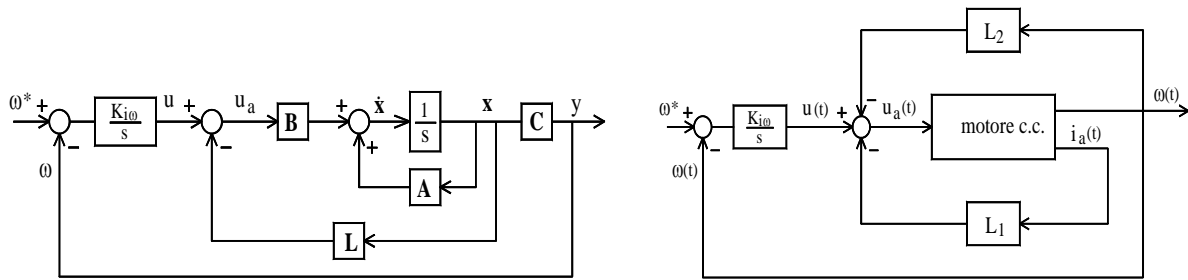


Fig.2.5.2 - Controllo di velocità a retroazione dello stato e dall'uscita

Per tener conto del blocco integratore si definisce una nuova variabile di stato; si dimostra comodo scegliere u , che prima rappresentava l'ingresso al sistema retroazionato. La sua dinamica è descritta dall'equazione

$$\frac{du}{dt} = K_{i\omega} (\omega^* - \mathbf{C}\mathbf{x}) \quad (2.5.22)$$

Aggiungendo tale equazione alla prima delle (2.5.15) si ottiene l'espressione in forma canonica del sistema retroazionato:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \mathbf{A}_i \xi(t) + \mathbf{B}_i \omega^*(t) \\ y(t) = \mathbf{C}_i \xi(t) \end{cases} \quad (2.5.23)$$

Il sistema è ora di ordine 3; il vettore di stato aumentato è

$$\xi = [i \ \omega \ u] \quad (2.5.24)$$

e le matrici del sistema sono definite dalle seguenti espressioni:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{B} \\ -K_{i\omega} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(R_a + L_1)/L_a & -(K_e \Phi + L_2)/L_a & 1/L_a \\ K_e \Phi/J & -B/J & 0 \\ 0 & -K_{i\omega} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5.25)$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_{i\omega} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_i = [0 \ 1 \ 0] \quad (2.5.26)$$

Il polinomio caratteristico del sistema (2.5.23) è dato da:

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}_i] = s^3 + s^2 \left(\frac{R_a + L_1}{L_a} + \frac{B}{J} \right) + s \left(\frac{B(R_a + L_1) + K_e \Phi(L_2 + K_e \Phi)}{L_a J} \right) + \frac{K_e \Phi K_{i\omega}}{L_a J} \quad (2.5.27)$$

Utilizzando la (2.5.16) si possono esprimere i coefficienti del polinomio caratteristico in funzione dei poli desiderati per il sistema retroazionato $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3) = s^3 + s^2(-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) + s(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \quad (2.5.28)$$

Il confronto tra la (2.5.27) e la (2.5.28) porta direttamente ad esprimere i valori dei guadagni della retroazione di stato L_1 , L_2 e del guadagno $K_{i\omega}$ del regolatore integrale in funzione della posizione desiderata per i poli λ_1 , λ_2 , λ_3 :

$$L_1 = -L_a \left(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \frac{1}{\tau_a} + \frac{1}{\tau_m} \right) \quad (2.5.29)$$

$$L_2 = \frac{L_a J}{K_e \Phi} \left(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 - \frac{1}{\tau_a \tau_{m1}} \right) + \frac{L_a B}{K_e \Phi} \left(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \frac{1}{\tau_m} \right) \quad (2.5.30)$$

$$K_{i\omega} = -K_e \Phi \tau_a \tau_{m1} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (2.5.31)$$

Si può notare l'analogia formale con l'espressione (2.5.21) relativa al controllo del sistema non aumentato. Per il sistema in esame, non è più banale il legame tra la posizione dei poli e i parametri consueti che caratterizzano la dinamica del sistema, quali sovralongazione, smorzamento e così via. Una indicazione può essere quella di mantenere *dominanti* i due poli complessi coniugati dati dalla (2.5.10); il terzo polo, che deve necessariamente essere reale e negativo, può essere scelto in modo che la dinamica legata al suo *modo* sia sufficientemente veloce rispetto a quella dei poli presistenti, ovvero facendo in modo che esso sia in modulo varie volte maggiore della parte reale dei poli dominanti.

Si osservi che tale modo di procedere nella scelta del terzo polo non elimina necessariamente la sua influenza sul sistema, che dipende dal *residuo* e non solo dalla sua posizione. Il modo associato al terzo polo potrebbe cioè avere grande peso, e quello che si fa è rendere veloce la dinamica associata, in modo che si smorzi velocemente l'eventuale influenza sul funzionamento complessivo dell'azionamento.

Una osservazione di carattere generale riguarda poi l'effettiva fattibilità del controllo a retroazione di stato. Anche se in teoria è possibile allocare i poli ovunque, i guadagni necessari potrebbero risultare molto elevati; nelle pratiche applicazioni (diverse dal motore in c.c. qui analizzato) non si dispone quasi mai di tutti gli stati, e si ricorre ad osservatori per stimare quelli non accessibili. Eventuali errori di stima, associati a grandi guadagni di retroazione, causano facilmente instabilità che di fatto limita le possibili posizioni dei poli del sistema. Anche se attraenti per la loro rigorosità matematica, queste tecniche vanno dunque applicate con la necessaria accortezza e tenendo in grande considerazione i limiti derivanti dalle non idealità dei circuiti reali.

2.6.1 - Esercizio 1

Progettare un azionamento per il controllo di velocità a catena chiusa di un motore in corrente continua ad eccitazione indipendente. Il motore abbia le seguenti caratteristiche:

- Resistenza di armatura $R_a = 1 \Omega$
- Induttanza di armatura $L_a = 46 \text{ mH}$
- Costante di f_{cem} e di coppia $K_e \Phi = 0.55 \text{ Vs/rad}$
- Tensione nominale d'armatura 110 V
- Corrente nominale 20 A
- Velocità nominale $1800 \text{ rpm} = 188.5 \text{ rad/s}$
- Momento di inerzia $J = 0.093 \text{ Kg m}^2$
- Coefficiente d'attrito $B = 0$ (trascurabile)

- Costante di trasduzione della velocità $K_{t\omega} = 1 \text{ V}/(\text{rad/s})$
- Costante di trasduzione della corrente $K_{ti} = 1 \text{ V/A}$

Da questi dati è possibile intanto calcolare altre due grandezze, che verranno utilizzate più avanti:

- la costante di tempo elettrica del motore : $\tau_a = L_a/R_a = 46 \text{ ms}$
- la costante τ_{m1} , definita nel par.1.4 : $\tau_{m1} = R_a J / (K_e \Phi)^2 = 0.3 \text{ s}$

Una soluzione classica per il controllo di velocità prevede due anelli di regolazione in cascata (cfr.par.2.3), uno interno per il controllo di corrente (che, in base alla (1.1.4) equivale, per un motore ad eccitazione indipendente e costante, ad un controllo di coppia) ed uno esterno, per la regolazione di velocità.

Si affronterà cioè il caso in cui la corrente non venga semplicemente limitata, ma, al contrario, venga costantemente regolata. In questo esercizio i guadagni dei trasduttori non vengono riportati all'interno dei regolatori con operazioni di algebra dei blocchi, come invece si è fatto nel corso della trattazione teorica; questo approccio, di carattere più pratico, indurrà lievi modifiche alle formule già ricavate in precedenza, senza tuttavia modificare la sostanza della trattazione.

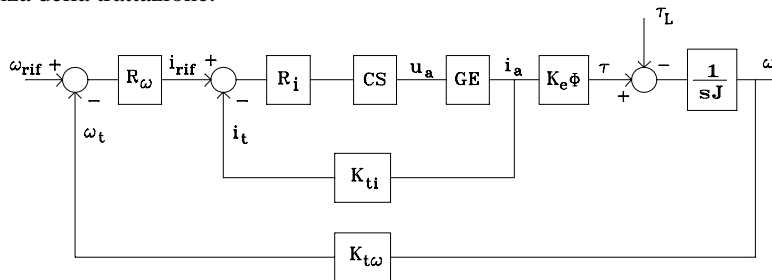


Fig.2.6.1.1 - Schema a blocchi dell'azionamento in corrente continua

Dato che il flusso è costante, le equazioni del motore sono lineari, in quanto i moltiplicatori diventano operatori lineari, e si può ricavare un modello matematico e a blocchi nel dominio di Laplace (Fig.2.6.1.1). Si focalizzerà l'attenzione per il momento sull'anello interno di regolazione della corrente.

Le funzioni di trasferimento $GE(s)$, $CS(s)$ e $R_i(s)$, discusse nel par.2.3, sono di seguito riportate per praticità; si noti che, essendo verificata l'ipotesi $\tau_{m1} \gg \tau_a$, vale la (1.5.18) per cui $GE(s)$ ha due poli reali e distinti $p_1 = -1/\tau_a$ e $p_2 = -1/\tau_{m1}$. Si ha dunque:

$$GE(s) = \frac{I_a(s)}{U_a(s)} = \frac{1}{R_a} \frac{s \tau_{m1}}{(1 + s \tau_{m1})(1 + s \tau_a)} \quad (2.6.1.1)$$

Il convertitore statico utilizzato nell'azionamento è un raddrizzatore a stella trifase. Una approssimazione generalmente accettata consiste nel considerarlo un sistema con guadagno K_c e ritardo τ_c pari a metà del periodo della tensione d'uscita prima del filtraggio che la rende continua (cfr. (2.1.1)). Risulta dunque:

$$CS(s) = \frac{K_c}{1 + s \tau_c} \quad (2.6.1.2)$$

Supponendo di avere un ingresso di riferimento di tensione variabile tra ± 10 V (abbastanza usuale), al quale deve corrispondere una tensione effettivamente applicata all'armatura del motore di ± 110 V e ricordando che la frequenza della tensione d'uscita prima del filtraggio è di $3 \cdot 50 = 150$ Hz, la (2.6.1.2) si caratterizza con i seguenti valori:

$$K_c = \frac{110}{10} = 11$$

$$\tau_c = \frac{1}{2} \frac{20 \text{ ms}}{3} = 3.33 \text{ ms}$$

A volte τ_c viene trascurato, specie se si utilizzano convertitori a ponte (per i quali esso risulta dimezzato rispetto al caso considerato) o, per motori di piccola e media potenza, se si utilizzano chopper, per i quali si considera come ritardo tra il riferimento e la tensione d'uscita il periodo di switching, generalmente molto piccolo.

Il regolatore di corrente R_i è di tipo proporzionale-integrale (PI); la sua funzione di trasferimento è la seguente:

$$R_i(s) = K_{pi} \frac{1 + s\tau_i}{s\tau_i} \quad (2.6.1.3)$$

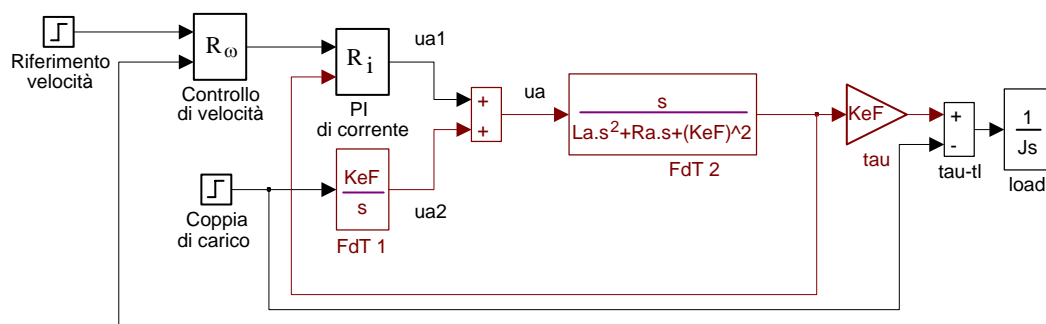
La funzione di trasferimento ad anello chiuso per la corrente risulta dunque:

$$GH_i(s) = K_{pi} \frac{1 + s\tau_i}{s\tau_i} \frac{K_c}{1 + s\tau_c} \frac{1}{R_a} \frac{s\tau_{m1}}{(1 + s\tau_{m1})(1 + s\tau_a)} K_{ti} \quad (2.6.1.4)$$

Per il progetto del regolatore di corrente, spesso si pone $\tau_i = \tau_{m1}$, così da produrre l'eliminazione sia dello zero che di uno dei poli di $GE(s)$.

In realtà, occorre sempre molta prudenza nel confidare in una perfetta cancellazione del polo del motore con lo zero del regolatore. Tra le difficoltà più evidenti, basti ricordare le variazioni parametriche (che competono al motore, ma non al regolatore) e le inevitabili imprecisioni della realizzazione discreta del regolatore.

La (2.1.4) offre inoltre lo spunto per una seconda riflessione. Nell'ipotesi, solo teorica, di avere un coefficiente d'attrito nullo (come del problema) e con la scelta di effettuare la cancellazione polo-zero, viene a mancare nella funzione GH il polo nell'origine, e pertanto il sistema risulta di ordine zero. Pur avendo scelto un regolatore di corrente di tipo PI, non è pertanto a priori assicurato errore nullo a regime. Lo schema a blocchi a cui far riferimento può essere ricavato da quello di Fig.2.6.1.1, eliminando per semplicità il convertitore statico e considerando unitarie tutte le costanti di trasduzione, sfruttando le proprietà dell'algebra dei blocchi in ipotesi di linearità.



Si consideri in un primo momento nulla la coppia di carico. Ci si rende facilmente conto che il sistema ha come unica possibile condizione *di regime* quella relativa ad una coppia prodotta nulla. In caso contrario, si osserverebbe una continua accelerazione, dato che il carico è supposto di tipo puramente inerziale. L'unica possibilità per avere un'uscita della FdT2 nulla a regime consiste nell'aver all'ingresso del blocco una quantità costante che, essendo prodotta da un regolatore di tipo PI, presuppone un errore nullo di corrente.

Nel caso vi sia applicata una coppia di carico costante⁶, la condizione di regime della velocità impone, com'è noto, l'uguaglianza tra la coppia prodotta dal motore e quella di carico. Questo comporta (nella sola rappresentazione prescelta, non nella realtà fisica dell'azionamento) una tensione di armatura in costante crescita, rappresentata dal termine ua_2 , che è appunto generata dalla presenza della coppia di carico. Nulla cambia per ua_1 , valendo la sovrapposizione degli effetti. Dunque, a regime, si ha ancora errore nullo di corrente. Questo approfondimento è stato fatto per evidenziare come la scissione della funzione di trasferimento del motore in GE(s) e GM(s) possa condurre a schemi fuorvianti e di difficile interpretazione in quanto, fisicamente, i fenomeni non sono separabili. In particolare, in un azionamento reale l'uscita a regime del regolatore PI sarà un riferimento di tensione costante volto a produrre anche la corrente chiamata da una eventuale coppia di carico.

Il progetto dell'azionamento può essere continuato facendo riferimento al diagramma di Bode di Fig.2.6.1.2:

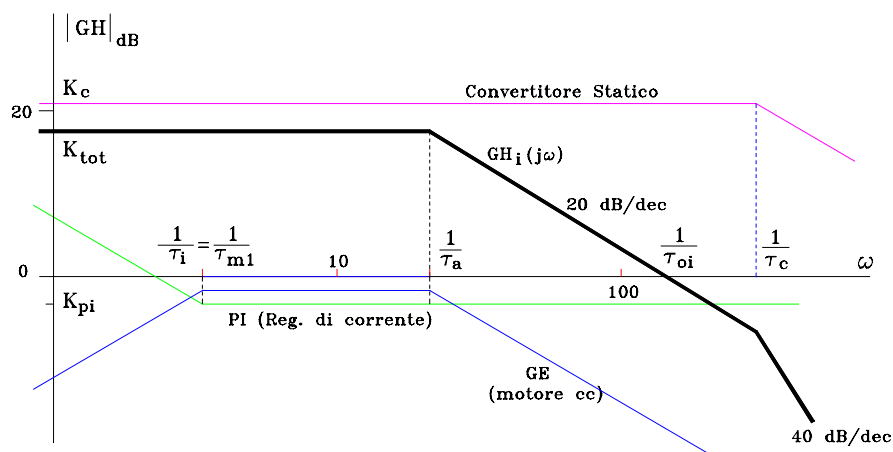


Fig.2.6.1.2 - Diagramma di Bode per l'anello di regolazione della corrente

Come evidenziato in Fig.2.6.1.2, la prima specifica per la sintesi del regolatore è stata dunque quella di porre $\tau_i = \tau_{m1} = 0.3$ s, da cui è immediato ottenere $1/\tau_i = 1/\tau_{m1} = 3.33$ rad/s.

Il secondo parametro del regolatore, K_{pi} , va scelto con l'obiettivo di garantire la stabilità dell'anello di corrente mantenendo una banda passante abbastanza estesa. Si osservi come la stabilità sia un requisito irrinunciabile, mentre una buona banda passante (e dunque una buona prontezza di risposta) contribuirà a semplificare il progetto dell'anello esterno di velocità.

Un criterio abbastanza comune per calcolare K_{pi} consiste nell'imporre una pulsazione di attraversamento della caratteristica di $|GH(j\omega)|$ dell'anello chiuso $1/\tau_{oi}$ pari alla metà di quella per cui avviene il cambio di pendenza (da 20 a 40 dB/dec) della caratteristica stessa (cfr.par.2.3). Nel caso in esame si pone quindi:

$$\frac{1}{\tau_{oi}} = \frac{1}{2\tau_c} = 150 \text{ rad/s} \quad (2.6.1.5)$$

⁶ Se non fosse costante, si avrebbe difficoltà a definire una condizione di regime per l'azionamento.

Con riferimento alla Fig.2.6.1.2, il numero di decadi⁷ tra le pulsazioni $1/\tau_a$ e $1/\tau_{oi}$ vale:

$$\log(1/\tau_{oi}) - \log(1/\tau_a) = \log(\tau_a/\tau_{oi})$$

Tenendo conto che la pendenza della caratteristica GH nel tratto compreso tra le due pulsazioni considerate è di 20 dB/dec, vale la relazione:

$$20 \log(K_{tot}) = 20_{[dB/dec]} \cdot \log(\tau_a/\tau_{oi}) \quad (2.6.1.6)$$

da cui è immediato ricavare intanto il valore del guadagno di Bode K_{tot} :

$$K_{tot} = \frac{\tau_a}{\tau_{oi}} = \frac{46 \cdot 10^{-3}}{6.66 \cdot 10^{-3}} = 6.9 \quad (2.6.1.7)$$

L'espressione (2.6.1.4) di $GH(s)$ dell'anello di corrente, semplificata dall'ipotesi $\tau_i = \tau_{m1}$ e con costante di trasduzione K_{ii} generica risulta:

$$GH(s) = \frac{K_{ii} K_{pi} K_c / R_a}{(1 + s \tau_a)(1 + s \tau_c)}$$

si evince che l'unica incognita rimane a questo punto K_{pi} , che si ricava dunque come segue:

$$K_{pi} = \frac{R_a K_{tot}}{K_c K_{ii}} = \frac{1 \cdot 6.9}{11 \cdot 1} = 0.627 \quad (2.6.1.8)$$

Il progetto del regolatore di corrente può così dirsi completato; l'anello di corrente ha una funzione di trasferimento W_i che, in prima approssimazione, può essere ricavata dalla caratteristica GH di Fig.2.6.1.2; in particolare, si assume che essa sia pari ad un guadagno $1/H = 1/K_{ii} = 1$ fino alla pulsazione di attraversamento $1/\tau_{oi}$, e poi coincida con G (cfr. par.2.3). Si può scrivere cioè:

$$W_i(s) = \frac{I_a(s)}{I_{rif}(s)} = \frac{1/K_{ii}}{(1 + s \tau_{oi})(1 + s \tau_c)} \quad (2.6.1.9)$$

Si passa ora al progetto del regolatore di velocità. Lo schema a blocchi a cui far riferimento è riportato in Fig.2.6.1.3:

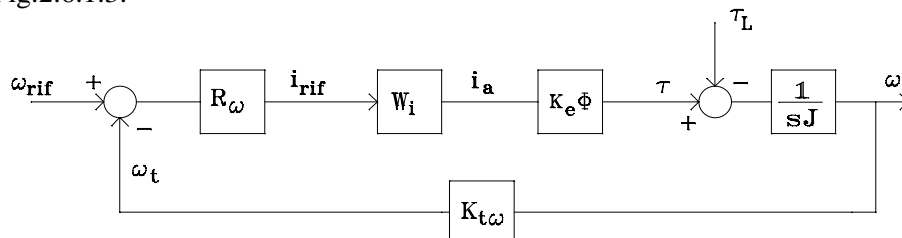


Fig.2.6.1.3 - Schema a blocchi per l'anello di regolazione della velocità

Anche in questo caso si sceglie un regolatore di tipo PI, che assicura errore nullo a regime e buone prestazioni dinamiche:

⁷Due frequenze f_1 ed f_2 distano tra loro n decadi quando il loro rapporto è 10^n , ovvero quando $\log(f_2/f_1) = n$.

$$R_{\omega}(s) = K_{p\omega} \frac{1 + s\tau_{\omega}}{s\tau_{\omega}} \quad (2.6.1.10)$$

La funzione di trasferimento ad anello chiuso per la velocità risulta dunque⁸:

$$GH_i(s) = K_{p\omega} \frac{1 + s\tau_{\omega}}{s\tau_{\omega}} \frac{1/K_{ti}}{(1 + s\tau_{oi})(1 + s\tau_c)} \frac{K_e \Phi K_{t\omega}}{sJ} \quad (2.6.1.11)$$

Il diagramma di Bode per il sistema di Fig.2.6.1.3 è il seguente:

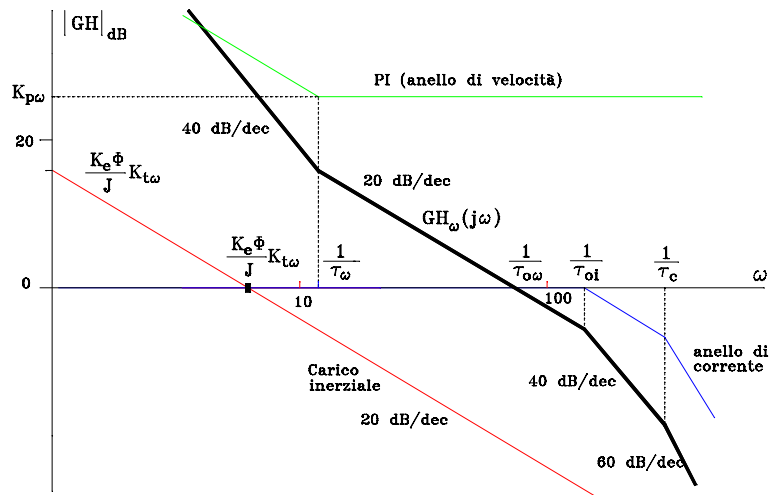


Fig.2.6.1.4 - Diagramma di Bode per l'anello di velocità

In analogia a quanto fatto per l'anello di corrente, anche qui si è imposta una pulsazione di attraversamento della caratteristica ad anello chiuso pari a metà della pulsazione corrispondente al passaggio da 20 a 40 dB/dec della caratteristica stessa; si è posto cioè

$$\frac{1}{\tau_{o\omega}} = \frac{1}{2\tau_{oi}} = 75 \text{ rad/s} \quad (2.6.1.12)$$

Seguendo la procedura di progetto illustrata nel par.2.3.1, si è poi posto un margine di fase $m_{\varphi} = 0.7$ rad. Si esprime dunque la fase dell'anello GH di velocità per $\omega_{\text{attr}} = 1/\tau_{o\omega}$ in funzione delle diverse costanti di tempo e da questa espressione si ricava l'unica incognita, ovvero la costante di tempo del regolatore di velocità:

$$\begin{aligned} m_{\varphi} &= \pi + \arg(GH(j\omega_{\text{attr}})) = \pi + \text{atg}(\omega_{\text{attr}}\tau_{\omega}) - [\text{atg}(\omega_{\text{attr}}\tau_{oi}) + \text{atg}(\omega_{\text{attr}}\tau_c) + \pi] = \\ &= \text{atg}(\tau_{\omega}/\tau_{o\omega}) - \text{atg}(\tau_{oi}/\tau_{o\omega}) - \text{atg}(\tau_c/\tau_{o\omega}) \end{aligned}$$

e quindi:

$$\text{atg}(\tau_{\omega}/\tau_{o\omega}) = m_{\varphi} + \text{atg}(\tau_{oi}/\tau_{o\omega}) + \text{atg}(\tau_c/\tau_{o\omega}) = 0.7 + \text{atg}(6.66 \text{ ms} \cdot 75) + \text{atg}(3.33 \text{ ms} \cdot 75) =$$

⁸ C'è da osservare che in questo caso non si può imporre che lo zero del regolatore PI cancelli uno dei poli della W_i ; ne risulterebbe un sistema con due poli nell'origine, con conseguente instabilità.

$$= 0.7 + \operatorname{atg}(0.5) + \operatorname{atg}(0.25) = 1.4 \quad (2.6.1.13)$$

da cui:

$$\tau_{\omega} = \tau_{\omega\omega} \cdot \operatorname{tg}(1.4) = 0.081 \text{ s} \quad (2.6.1.14)$$

Rimane ora da determinare il guadagno $K_{p\omega}$ del regolatore, imponendo, come si è detto, una pulsazione di attraversamento di $1/\tau_{\omega\omega} = 75 \text{ rad/s}$ ed usando il valore appena calcolato per τ_{ω} . Si può scrivere:

$$|GH(j\omega_{\text{attr}})| = \frac{K_{p\omega} K_e \Phi K_{t\omega}}{\omega_{\text{attr}}^2 K_{ti} J \tau_{\omega}} \sqrt{\frac{1 + \omega_{\text{attr}}^2 \tau_{\omega}}{(1 + \omega_{\text{attr}}^2 \tau_{oi}^2)(1 + \omega_{\text{attr}}^2 \tau_c^2)}} = 1 \text{ per } \omega_{\text{attr}} = 75 \text{ rad/s} \quad (2.6.1.13)$$

Sostituendo i valori noti si ottiene:

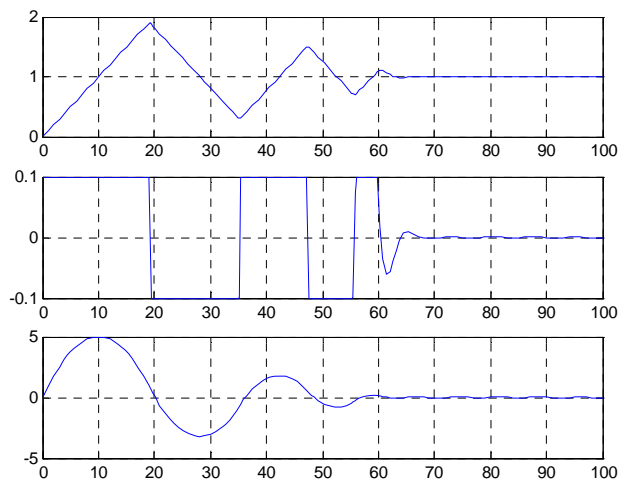
$$\frac{K_{p\omega} \cdot 0.55}{1 \cdot 0.093 \cdot 0.081 \cdot 75^2} \sqrt{\frac{1 + 75^2 \cdot 0.081^2}{(1 + 75^2 \cdot (6.66 \cdot 10^{-3})^2)(1 + 75^2 \cdot (3.33 \cdot 10^{-3})^2)}} = 1 \quad (2.6.1.14)$$

da cui, subito:

$$K_{p\omega} = 14.4 \quad (2.6.1.15)$$

Il progetto dell'azionamento è così concluso; rimangono alcune considerazioni sulla realizzazione pratica del sistema.

- Per un progetto realistico di un sistema di controllo occorre tener conto di alcuni fenomeni non-lineari. Sia i motori che i convertitori hanno dei limiti fisici, che non possono essere oltrepassati: un motore ha una velocità massima, un inverter ha una massima tensione erogabile. Se un sistema di controllo si trova ad operare in un range esteso, può accadere che le variabili di controllo raggiungano qualcuno di questi limiti. In tal caso la catena di retroazione è bruscamente interrotta ed il sistema si trova ad operare a catena aperta, dato che la variabile di controllo rimarrà costante al suo valore limite, indipendentemente dall'uscita del processo controllato. In questa situazione, se il sistema di controllo prevede un'azione integrale, l'errore continuerà ad essere integrato, senza però effetti sulla variabile di controllo. Il termine integrale può allora raggiungere valori molto elevati, situazione che in inglese è solitamente chiamata "wind up", che è il "caricarsi di una molla". Per giungere alla fine ad una situazione di regime, per un lungo periodo l'errore in ingresso all'integratore dovrà avere segno opposto; in altre parole, quando il sistema entra in saturazione insorgeranno larghe sovraoscillazioni transitorie. Il fenomeno è particolarmente comprensibile nell'ipotesi che il sistema da controllare sia un puro integrale (blocco 1/s). Le grandezze evolvono come in figura:



Nell'ordine, sono riportate l'uscita, l'ingresso e la parte integrale. E' da notare che l'ingresso al sistema, vale a dire l'uscita del regolatore PI, è limitata tra ± 0.1 . Il riferimento è unitario, così grande che l'ingresso satura subito a $+0.1$. Mentre il sistema integra tale

ingresso, l'errore all'ingresso della parte integrale viene continuamente integrato, portando a valori molto grandi. Quando finalmente l'uscita raggiunge il riferimento, in $t=10$, la parte integrale è molto alta, perciò l'uscita continua a crescere, e l'integrale comincia a scendere, dato che ora al suo ingresso ha un errore negativo. Quando finalmente l'integrale smaltisce tutta la parte accumulata, un po' prima di $t=20$, l'uscita è ormai molto sopra il riferimento, e tutto si ripete, con segni opposti. La parte proporzionale smorza queste oscillazioni; alla fine l'uscita del sistema diventa così vicina al riferimento che l'ingresso non satura più, ed il sistema di controllo ritorna ad avere un comportamento lineare. Il fenomeno del *wind-up* è noto e ben compreso anche nel mondo industriale, anche se i rimedi sono spesso considerati *know-how* strategico e non vengono pubblicati. Il metodo che viene di seguito proposto segue il principio di ricalcolare il valore dell'uscita della parte integrale in presenza di saturazione, in modo che il nuovo valore dia un'uscita molto vicina al limite stesso. E' conveniente evitare di resettare l'integrale istantaneamente, ma di effettuare il calcolo in modo dinamico, con una costante di tempo τ_t . Lo schema a cui far riferimento è riportato in Fig.2.6.1.5.

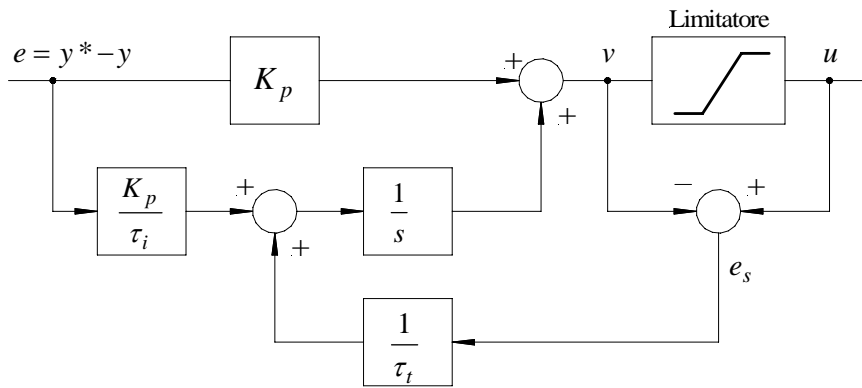
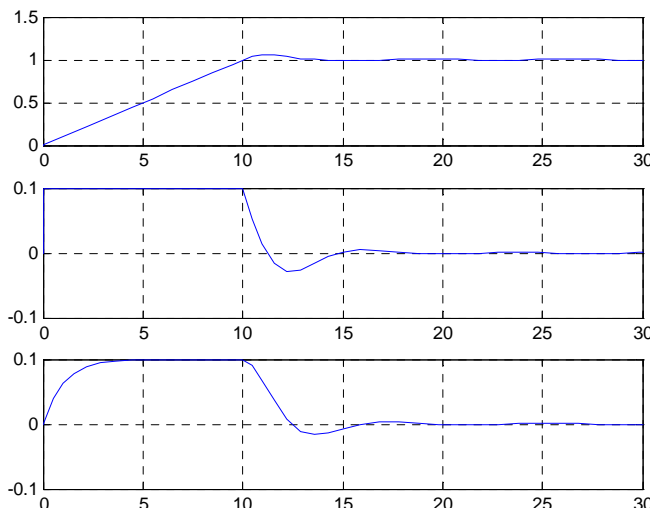


Fig.2.6.1.5 - Regolatore PI con antiwindup basato su back-calculation and tracking.

Rispetto al PI convenzionale, il sistema ha una nuova retroazione che è generata dal confronto tra l'ingresso v e l'uscita u del limitatore del regolatore *PI*. L'errore e_s è portato all'ingresso dell'integratore tramite il guadagno $1/\tau_t$. Naturalmente, e_s è nullo quando non vi è saturazione, ed in tal caso il meccanismo non influenza assolutamente il regolatore *PI*, che si comporta in modo convenzionale. In saturazione, la normale retroazione viene bloccata, in quanto u rimane costante. Entra però in funzione la retroazione attorno all'integratore, la cui evoluzione forza a zero il relativo ingresso:

$$\frac{1}{\tau_t} e_s + \frac{K_p}{\tau_i} e = 0 \quad \rightarrow \quad e_s = -\frac{k\tau_t}{\tau_i} e \quad (2.6.1.16)$$



Dato che $e_s = u - v$ (Fig.2.6.1.5) si può scrivere infine:

$$v = u_{lim} - \frac{k\tau_t}{\tau_i} e$$

dove u_{lim} rappresenta il valore del limite in saturazione del *PI*. Dato che l'errore e ed il limite u_{lim} hanno lo stesso segno, v è di ampiezza sempre maggiore di u_{lim} e questo tiene l'integratore dinamicamente caricato ad

un valore adeguato, vicino al limite. Non appena l'errore cambia di segno v raggiunge u_{lim} e l'antiwindup si sblocca, lasciando funzionare il PI in zona lineare. La Fig.2.6.1.6. riporta gli andamenti delle stesse grandezze osservate sopra, quando è inserito il meccanismo di antiwindup appena descritto. La velocità con cui l'integratore è resettato dipende dal guadagno della retroazione, $1/\tau_i$. Essa è spesso definita *tracking time constant*. Può sembrare conveniente scegliere un valore di τ_i molto piccolo, perchè questo permette di resettare molto velocemente l'integratore. Occorre comunque prestare attenzione quando è presente anche la parte derivativa del regolatore (PID), perchè piccoli errori in ingresso potrebbero (per l'effetto derivativo) far saturare brevemente l'uscita, scatenando il meccanismo di antiwindup e resettando il regolatore. Come regola approssimata, τ_i va scelta maggiore di τ_i e minore dell'eventuale τ_d (se il blocco derivativo è espresso come $K_p \tau_d s$). Si può pensare di porre (*rule of thumb*) $\tau_i = \sqrt{\tau_i \tau_d}$.

Nel progetto in esame si è scelto per l'anello di corrente $\tau_i = \tau_i$. Si è poi effettuata una prova, con un gradino di riferimento di 20A, pari alla corrente nominale, supponendo un limite di riferimento di tensione di 1V, con motore fermo. I risultati, rispettivamente senza e con meccanismo di antiwindup, sono riportati in Fig.2.6.1.6.

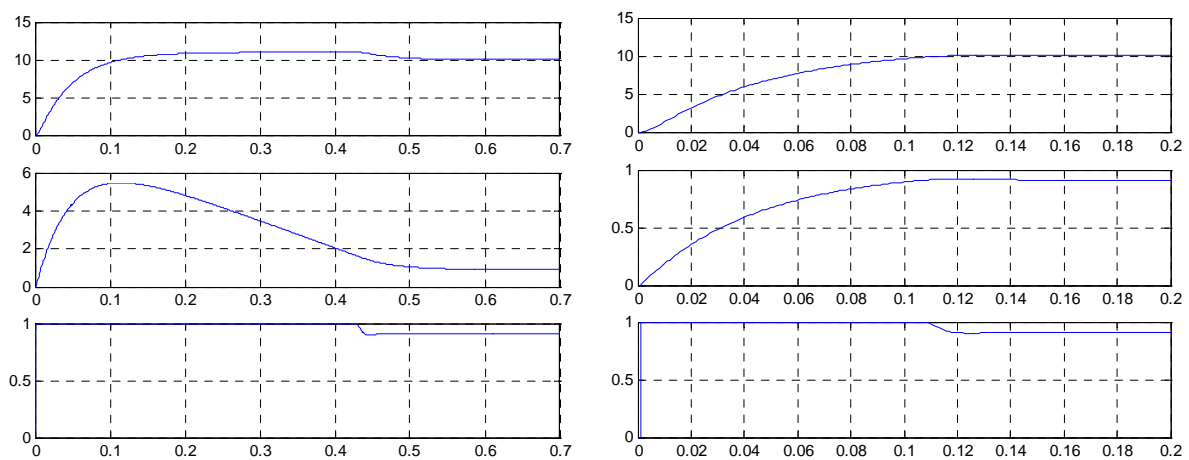


Fig.2.6.1.6 - Anello di corrente senza (a sinistra) e con (a destra) antiwindup. [i_a , parte integrale, u_a^*]

Si può notare che in assenza di antiwindup la parte integrale si carica molto durante il transitorio in limitazione, e questo comporta un lungo periodo di corrente al di sopra del limite. Al contrario, la benefica azione di antiwindup (a destra) riduce notevolmente la crescita (caricamento) dell'integrale, con una risposta molto più pronta e priva di overshoot.

- E' possibile cercare di compensare parte della coppia di tipo inerziale, intervenendo nella generazione del riferimento di corrente. La derivata della velocità effettiva può essere sostituita dalla derivata di ω_{rif} , che risulta generalmente meno disturbata; ovviamente non è la stessa cosa, dato che così facendo si trascura di fatto la dinamica dell'anello di velocità; in ogni caso, come in tutte le compensazioni feedforward, la correzione sarà solo parziale (60-70%), per impedire che errori anche grossolani possano innescare reazioni positive destabilizzanti. E' possibile in questo modo fornire a priori una grossa parte del riferimento di corrente, migliorando le prestazioni dinamiche del sistema. Quanto detto è schematizzato in Fig.2.6.1.7:

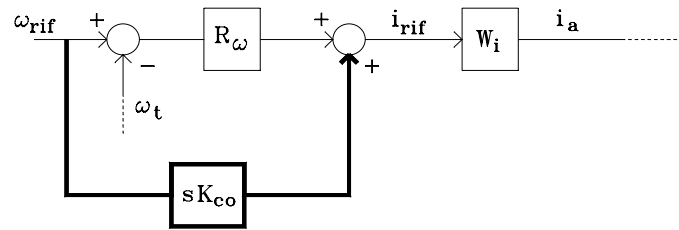


Fig.2.6.1.7 - Feedforward nel riferimento di corrente

E' da sottolineare che il miglioramento nella dinamica del sistema non deriva da qualche intervento sulla catena GH, che, al contrario, rimane invariata.

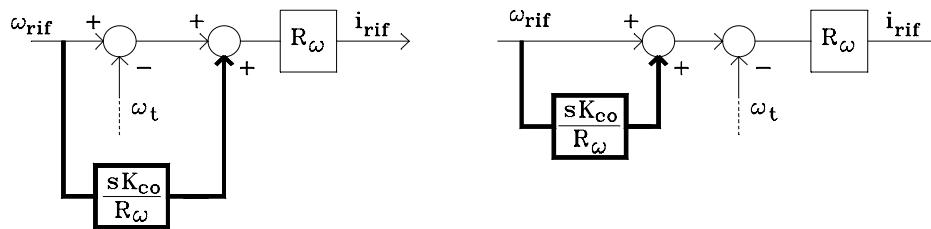


Fig.2.6.1.8 - Prelaborazione del riferimento di corrente

Di fatto, come illustrato in Fig.2.6.1.8, la compensazione proposta equivale ad una preelaborazione del riferimento, che ha come effetto una maggiore rapidità di risposta al gradino e dunque un aumento della banda passante. Una limitazione è ovviamente costituita dall'impossibilità di realizzare una perfetta derivata di una funzione a gradino (impulso ideale).

- Durante l'accelerazione (in limitazione di corrente), la corrente non è pari al suo riferimento (Fig.2.6.1.9).

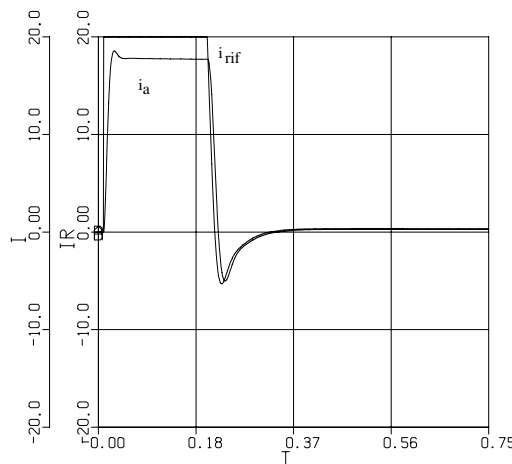


Fig.2.6.1.9 - Andamento della corrente durante l'avviamento

Questo non contrasta con il fatto che l'anello di regolazione di corrente sia un sistema di tipo 1 (cioè con un polo nell'origine) e pertanto debba avere errore nullo a regime; infatti, durante l'accelerazione non si è a regime di velocità, e dato che essa partecipa alla dinamica dell'anello di corrente, anche quest'ultimo non può essere considerato a regime, dunque ammette errore non nullo.

Comunque, è possibile dare una spiegazione alla discrepanza tra riferimento e valore attuale, facendo riferimento allo schema a blocchi di Fig.2.6.1.10:

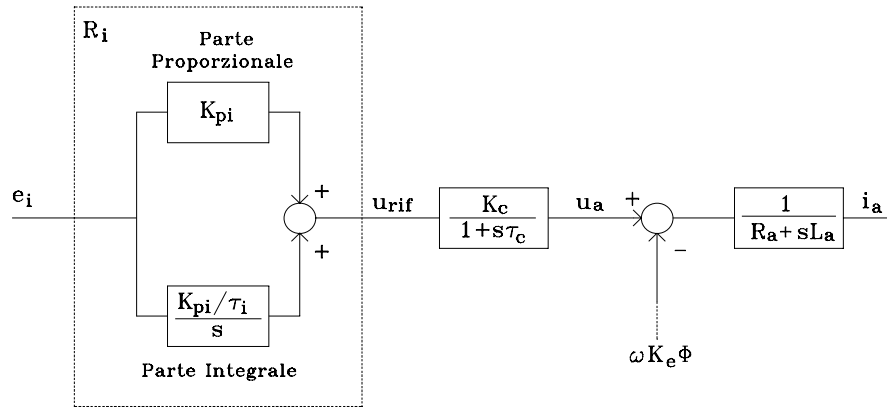


Fig.2.6.1.10 - Errore di corrente nel funzionamento in limitazione

Durante la fase di accelerazione effettuata in limitazione di corrente e dopo un transitorio, la corrente effettiva i_a si pone a regime ad un valore costante I_L inferiore al riferimento (Fig.2.6.1.9). Supponendo un carico di tipo inerziale, la f.e.m. $e_a(t)$ cresce con pendenza:

$$\frac{de_a(t)}{dt} = K_e \Phi \frac{d\omega(t)}{dt} = K_e \Phi \frac{K_e \Phi I_L}{J} \quad (2.6.1.18)$$

e, ricordando l'equazione elettrica del motore in c.c., derivando entrambi i membri e considerando la corrente costante, tale crescita deve essere bilanciata da una stessa crescita del riferimento di tensione. Questo presuppone e spiega la presenza dell'errore di corrente e_i ; in questo modo, la tensione u_{rif} cresce⁹ con pendenza $e_i K_c (K_{pi}/\tau_i)$. Se e_i fosse nullo, la tensione di riferimento non crescerebbe. Uguagliando le due pendenze, si può fare una stima numerica dell'errore e_i :

$$K_c (K_{pi}/\tau_i) e_i = \frac{(K_e \Phi)^2 I_L}{J} = \frac{(K_e \Phi)^2 (I_{Le} - e_i)}{J} \quad (2.6.1.19)$$

dove I_{Le} è il limite di corrente e I_L è, come detto sopra, il valore effettivo della corrente durante la limitazione. Sostituendo i valori numerici si ottiene, per il caso in esame:

$$e_i = \frac{(K_e \Phi)^2 I_{Le}}{K_c (K_{pi}/\tau_i) J + (K_e \Phi)^2} = \frac{0.55^2 \cdot 20}{11 \cdot 2.09 \cdot 0.093 + 0.55^2} = 2.47 \text{ A} \quad (2.6.1.20)$$

- Un rimedio all'inconveniente appena descritto (che, comunque, non è rilevante in molte applicazioni pratiche) consiste nell'approntare una compensazione di tensione (*voltage feedforward*). Dato che una parte considerevole della tensione di armatura va a contrastare la f.e.m. $K_e \Phi \omega$ e dato che la velocità viene trasdotta e quindi è nota, nella creazione del riferimento di tensione si può già fornire direttamente "a priori" una tensione pari alla f.e.m., lasciando al regolatore il compito di supplire solo la parte di tensione di armatura che produce la corrente i_a . Quanto detto è evidenziato in Fig.2.6.1.11:

⁹ Questo presuppone che ancora non sia intervenuta la limitazione di tensione, a $\pm 10V$, all'uscita del regolatore di corrente.

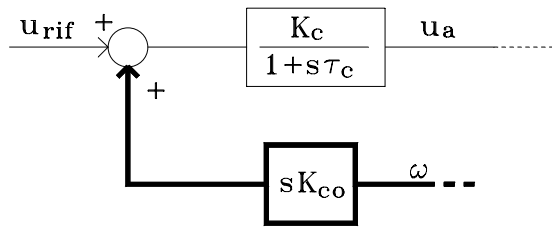


Fig.2.6.1.11 - Feedforward di tensione

Si è infatti osservato che durante l'accelerazione il riferimento di tensione debba crescere per bilanciare l'aumento della f.e.m. $e_a(t)$, e come questo comporti la necessaria presenza di un errore di corrente per "muovere" l'integratore del regolatore di corrente; fornendo gran parte della necessaria variazione di u_{rif} tramite il feedforward viene eliminata di fatto questa necessità e di conseguenza l'errore di corrente si

riduce notevolmente (fino a scomparire se si attua una compensazione al 100%).

- Una variazione della tensione di rete, entro certi limiti (quelli imposti dalla saturazione dell'anello di corrente) non influenza il controllo, perché in questo azionamento viene controllata direttamente la coppia, mentre la tensione è solo il "mezzo" usato per il controllo. Ad una diminuzione di tensione di rete corrisponderà semplicemente un aumento della tensione di riferimento generata dal regolatore di corrente e questo fino a che non entra in gioco la saturazione dell'uscita dell'anello di corrente.

2.6.2 - Esercizio 2

Progettare un azionamento per il controllo di velocità a catena chiusa in retroazione di stato per un motore in corrente continua ad eccitazione indipendente. Il motore abbia le seguenti caratteristiche:

- Resistenza di armatura $R_a = 1 \Omega$
- Induttanza di armatura $L_a = 46 \text{ mH}$
- Costante di f.cem e di coppia $K_e \Phi = 0.55 \text{ Vs/rad}$
- Tensione nominale d'armatura 110 V
- Corrente nominale 20 A
- Velocità nominale $1800 \text{ rpm} = 188.5 \text{ rad/s}$
- Momento di inerzia $J = 0.093 \text{ Kgm}^2$
- Coefficiente d'attrito $B = 58 \cdot 10^{-6} \text{ Nms/rad}$
- Costante di trasduzione della velocità $K_{t\omega} = 1 \text{ V/(rad/s)}$
- Costante di trasduzione della corrente $K_{ti} = 1 \text{ V/A}$

Da questi dati è possibile intanto calcolare le costanti di tempo caratteristiche del motore, che verranno utilizzate più avanti:

- la costante di tempo elettrica del motore : $\tau_a = L_a/R_a = 46 \text{ ms}$
- la costante di tempo meccanica del motore : $\tau_m = J/B = 1.6 \text{ s}$
- la costante di tempo elettromeccanica: $\tau_{m1} = RJ/(K_\Phi)^2 = 0.3 \text{ s}$

Il modello del motore in Simulink™ è il seguente:

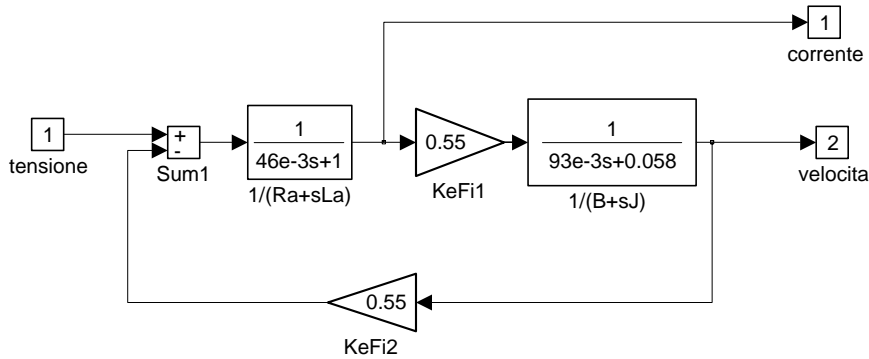


Fig.2.6.2.1 - Modello Simulink™ del motore in corrente continua

La tensione di armatura è stata considerata l'ingresso, mentre la velocità del motore è l'uscita del sistema. La corrente è pure resa disponibile come uscita del blocco, in quanto variabile di stato.

L'analisi teorica della tecnica di retroazione dello stato è stata affrontata nel par.2.5; nel seguito si farà dunque riferimento ai risultati ivi ottenuti, particolarizzandoli con i dati numerici dell'esempio. Si parte con la realizzazione di un azionamento a retroazione di stato pura, fissando come specifiche per il sistema retroazionato un coefficiente di smorzamento $\xi=1/\sqrt{2}=0.707$ ed un tempo di salita t_r di 66 ms a cui corrisponde (cfr. 2.5.8) una pulsazione naturale $\omega_0=33$ rad/s.

Questi dati permettono di stabilire la posizione desiderata per i poli λ_1 e λ_2 del sistema retroazionato; la (2.5.10) porge infatti

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} = -23.3 \pm j23.3 \quad (2.6.2.1)$$

La matrice di retroazione di stato (2.5.21) può ora essere valutata:

$$L_1 = -L_a(\lambda_1 + \lambda_2 + 1/\tau_a + 1/\tau_m) = 1.1464$$

$$L_2 = \frac{JL_a}{K_e\Phi} \left(\lambda_1\lambda_2 + \frac{1}{\tau_a\tau_{m1}} \right) + \frac{BL_a}{K_e\Phi} \left(\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{\tau_m} \right) = 7.9202$$

Lo schema a blocchi del controllo a retroazione di stato in Simulink™ è riportato in Fig. 2.6.2.2; si osservi come anche il riferimento venga moltiplicato per L_2 per renderlo omogeneo con la retroazione di velocità e quindi per poterlo esprimere direttamente in rad/s.

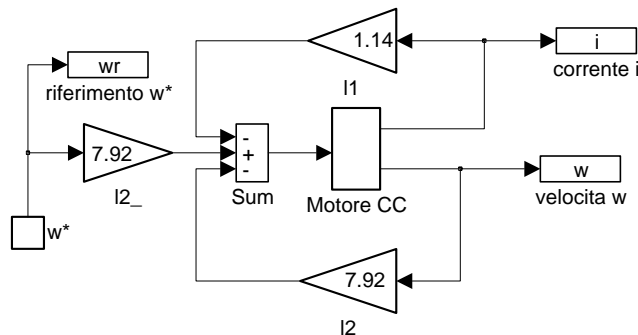


Fig.2.6.2.2 - Modello Simulink™ dell'azionamento in retroazione di stato

Il diagramma di Bode relativo al sistema (cfr.(2.5.15) par.2.3) è il seguente:

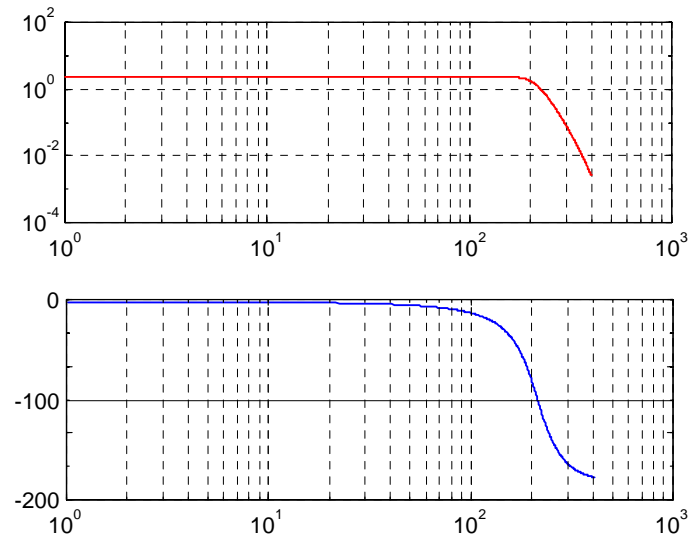


Fig.2.6.2.3 - Diagrammi di Bode (modulo e fase) dell'azionamento in retroazione di stato

La risposta ad un gradino di riferimento di velocità di 50 rad/s è riportata in Fig.2.6.2.4:

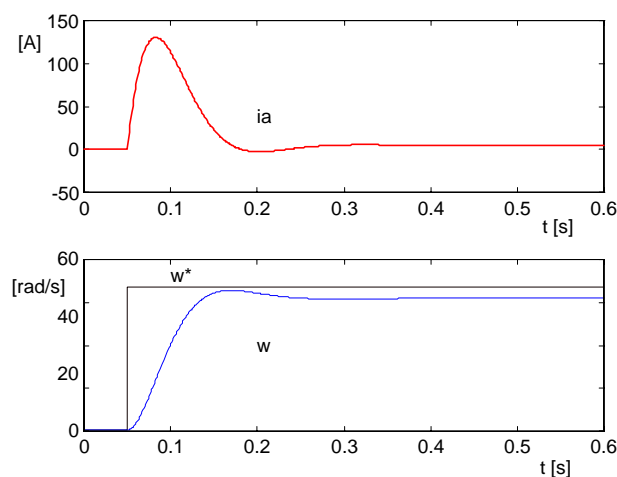


Fig.2.6.2.4 - Risposta al gradino di velocità (in alto la corrente d'armatura) in retroazione di stato

Appare un errore a regime permanente, anche in assenza di errori nei parametri utilizzati per il controllo. Questo può essere giustificato considerando che la funzione di trasferimento del sistema a catena aperta non ha poli nell'origine, e che quindi il sistema è di tipo 0, con errore di regime permanente nella risposta al gradino. Una rappresentazione grafica diversa, seppure equivalente, dello schema di Fig.2.6.2.2 è riportata nella seguente Fig.2.6.2.5:

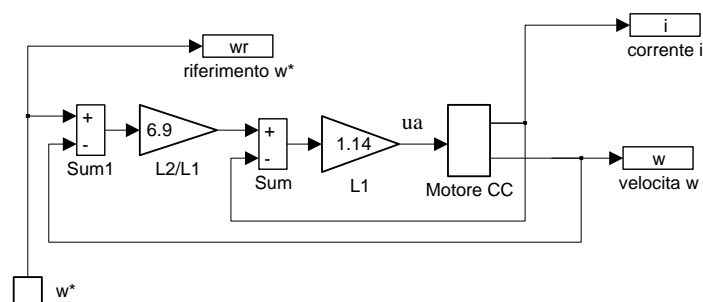


Fig.2.6.2.5 - Azionamento in retroazione di stato, interpretato come uno schema in cascata

Tale rappresentazione evidenzia la similitudine del controllo proposto con quello in cascata analizzato nei paragrafi precedenti, ove si utilizzino regolatori di tipo proporzionale sia per l'anello di velocità che di corrente. E' chiaro che anche in assenza di carico (ovvero con corrente nulla) l'uscita del regolatore di velocità debba produrre un riferimento di tensione d'armatura pari alla f.e.m. $K_e\Phi\omega$, e che questo generi necessariamente un errore a regime pari a

$$e_{rp} = K_e\Phi \omega / L_2 = K_e\Phi (\omega^* - e_{rp}) / L_2 \quad (2.6.2.2)$$

da cui subito

$$e_{rp} = \frac{K_e\Phi\omega^*}{L_2 + K_e\Phi} = \frac{0.55 \cdot 50}{7.92 + 0.55} = 3.24 \text{ rad/s} \quad (2.6.2.3)$$

Si può anche notare il grande overshoot di corrente (essa raggiunge 130 A, pari a 6.5 volte il valore nominale del motore) che viene comandato per soddisfare alle specifiche di banda passante del sistema.

In alternativa allo schema proposto, che soffre di evidenti limitazioni, si sperimenta ora lo schema a retroazione di stato con anello integrale sulla velocità, come spiegato nella seconda parte del par.2.5. Tale schema aumenta l'ordine del sistema complessivo, introducendo un polo nell'origine nella catena diretta, che ha il benefico effetto di annullare l'errore a regime in risposta ad un gradino di velocità.

Per il calcolo dei parametri di regolazione è necessario fissare la posizione desiderata dei tre poli del sistema a catena chiusa; come suggerito, si mantiene la posizione dei primi due:

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_o \pm \omega_o \sqrt{\xi^2 - 1} = -23.3 \pm j 23.3 \quad (2.6.2.4)$$

a cui si aggiunge il terzo, sufficientemente lontano dai primi due:

$$\lambda_3 = -100 \quad (2.6.2.5)$$

Con questi dati si trovano i seguenti parametri, per la matrice di retroazione dallo stato e per il guadagno dell'anello integrale rispettivamente:

$$L_1 = -L_a \left(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \frac{1}{\tau_a} + \frac{1}{\tau_m} \right) = 5.7464 \quad (2.6.2.6)$$

$$L_2 = \frac{L_a J}{K_e\Phi} \left(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 - \frac{1}{\tau_a\tau_{m1}} \right) + \frac{L_a B}{K_e\Phi} \left(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \frac{1}{\tau_m} \right) = 44.21 \quad (2.6.2.8)$$

$$K_{i\omega} = -K_e\Phi\tau_a\tau_{m1}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 847 \quad (2.6.2.9)$$

Lo schema a blocchi in Simulink™ è riportato nella seguente Fig.2.6.2.6:

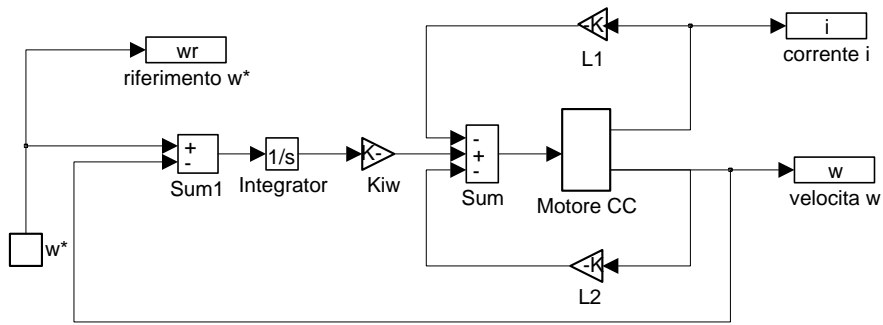


Fig.2.6.2.6 - Azionamento in retroazione di stato, con anello integrale

ed il diagramma di Bode del sistema aumentato descritto dalla (2.5.23) è il seguente:

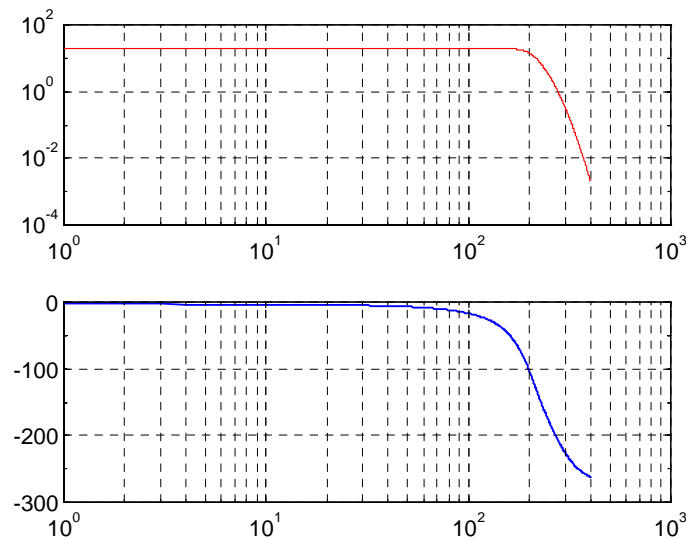


Fig.2.6.2.7 - Diagrammi di Bode (modulo e fase) dell'azionamento in retroazione di stato con anello integrale

Per confronto con lo schema precedente, in Fig.2.6.2.8 viene riportata la risposta ad un gradino di riferimento di velocità di 50 rad/s:

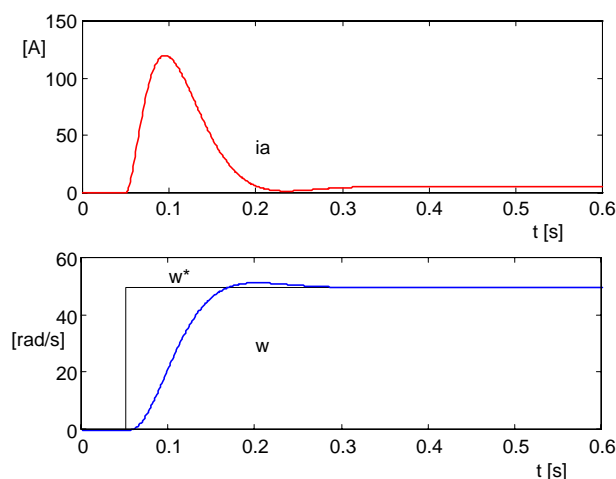


Fig.2.6.2.8 - Risposta al gradino di velocità (in alto la corrente d'armatura) dell'azionamento con anello integrale

Si può notare la scomparsa dell'errore a regime, con una dinamica che si mantiene simile a quella del caso precedente. Permane la grande sovralongazione della corrente, che rimane un grosso

inconveniente degli schemi analizzati. Nelle pratiche applicazioni essa deve essere naturalmente limitato in qualche modo, anche se non è semplice come nel caso dei controllori in cascata, ove la limitazione del riferimento di corrente sortisce direttamente questo effetto.